UNIVERSITE CADI AYYAD — Année universitaire: 2006-2007

Faculté Poly-disciplinaire Safi — Analyse I : TD N° 5 (SMA/SMI)

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur [0, 3] par

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x=0 \\ x & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 1 & \text{si} \quad x=1 \\ -x+2 & \text{si} \quad 1<x\leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2<x\leq 3. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^3 f(t)dt$.
2. Soit $x\in[0,3]$, calculer $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,3]$.

Exercice 2

Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme $u'f'(u)$

a. $\dfrac{1}{x^2+1}$ *b.* $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$ *c.* $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ *d.* $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

e. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ *f.* $\dfrac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}}$ *g.* $\dfrac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}$ *h.* $\dfrac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$.

Exercice 3

Calculer une primitive des fonctions suivantes en utilisant une intégration par parties

a. $\dfrac{1}{49-4x^2}$ *b.* $\dfrac{5x-12}{x(x-4)}$ *c.* $\dfrac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}$ *d.* $\dfrac{6x-11}{(x-1)^2}$.

e. $\dfrac{-19x^2+50x-25}{x^2(3x-5)\sqrt{x}}$ *f.* $\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ *g.* $\dfrac{1}{(x^2+4x+5)^2}$ *h.* $\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$.

Exercice 4

Calculer une primitive des fonctions suivantes

a. x^2e^{-x} *b.* $e^{3x}\cos 2x$ *c.* $\arctan x$ *d.* $\arcsin x$.

e. $\sin x\ln\cos x$ *f.* $x^3e^{x^2}$ *g.* $x^3 sh\, x$ *h.* $x^3\cos x^2$.

Exercice 5

Calculer une primitive des fonctions suivantes

a. $\sin^4 x$ *b.* $\tan^3 x+2\tan^2 x$ *c.* $\dfrac{\sin x}{\cos x(\cos x-1)}$ *d.* $\dfrac{1}{2\cos x}$

e. $\dfrac{1}{4\sin x-3\cos x}$ *f.* $\dfrac{2\cos^3 x}{\sqrt{1+\sin x}}$ *g.* $\dfrac{2\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}$ *h.* $\dfrac{1}{\cos^4 x}$.

Exercice 6

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul on a $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$. En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$ on a

$$I_{2p} = \frac{\pi P_1(p)}{2P_2(p)} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{P_2(p)}{P_1(p+1)},$$

où $P_1(p) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ et $P_2(p) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k)$.

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leq \cos^n t \leq \cos^{n-1} t$. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

4. Montrer que la suite de terme général $u_p = \dfrac{I_{2p-1}}{I_{2p}}$ converge vers 1. En déduire la formule de Wallis,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}\right]^2 = \pi.$$

5. Montrer que la suite de terme général $w_n = (n+1)I_nI_{n+1}$ est une suite constante. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 7

Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in [a, b]$

$$f(a+b-t) = f(t).$$

Montrer que

$$\int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt.$$

Application: Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\cos t\sin t}{\sin^4 t + \cos^4 t}dt.$$