

### Exercice 1 :

1. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . On suppose que la fonction  $f$  est holomorphe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $f$  est constante.
- (b)  $Re(f)$  est constante.
- (c)  $Im(f)$  est constante.

En déduire que la fonction  $f$  définie par  $f(z) = |z|$  n'est pas holomorphe.

2. Soit  $f$  une fonction de  $D \subset \mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{iy}{\sqrt{2(x + \sqrt{x^2 + y^2})}}, \quad z = x + iy.$$

- (a) Trouver  $D$  de telle sorte que  $f$  soit bien définie.
- (b) Montrer que  $f$  est holomorphe sur  $D$ .

### Exercice 2 :

1. Calculer l'intégrale  $I = \int_{\Gamma} \bar{z} dz$ , où  $\Gamma$  est le chemin joignant le point  $(1, 1)$  au point  $(2, 4)$  le long de la parabole d'équation  $y = x^2$ .

2. Calculer l'intégrale  $I = \int_{\Gamma} (z^2 + 3z) dz$ , où  $\Gamma$  est définie par  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  du point  $(2, 0)$  au point  $(0, 2)$ .

3. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels strictement positifs et  $\Gamma$  l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Calculer  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$ . En déduire la valeur de  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}$ .

**Exercice 3 :** Déterminer la nature des singularités isolées des fonctions suivantes et préciser la valeur des résidus :

a)  $\frac{1 - \cos(z)}{z^2}$     b)  $\tan(z)$     c)  $\frac{z^3 + 1}{z(z - i)^3}$     d)  $\exp(\frac{1}{z^2})$ .

**Exercice 4 :** Soient les fonction  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

1. Déterminer les développements de  $f$  et  $g$  en série de Laurent dans les trois cas suivant :

- (a)  $0 < |z| < 1$ ,



(b)  $1 < |z| < 2$ ,

(c)  $|z| > 2$ .

2. Calculer  $\int_{\gamma} f(z)dz$ , où  $\gamma$  est le cercle de centre  $\frac{-3}{2}$  et de rayon 1.

**Exercice 5 :** Déterminer les singularités et les résidus dans  $\mathbb{C}$  de  $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 1)}$ .

Puis trouver la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1)}$ .

**Exercice 6 :** Soit  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + 1)} dx$ .

1. Montrer que  $I$  est une intégrale convergente.

Soit  $f$  la fonction complexe définie par  $\frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)}$ . On considère  $\gamma^+$  le contour formé par le segment  $[-R, -r]$ , le demi-cercle supérieur  $C_{r-}$  de centre 0 et de rayon  $r$ , le segment  $[r, R]$  et le demi-cercle supérieur  $C_{R+}$  de centre 0 et de rayon  $R > 0$ .

2. Etudier les singularités de  $f$  et donner les résidus correspondants puis calculer  $\int_{\gamma^+} f(z)dz$  suivant les valeurs de  $R$ .

3. (a) Montrer que  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$  et que  $\int_0^{\pi} e^{-R \sin(\theta)} d\theta \leq \frac{\pi}{R}$ .

(b) Pour  $R > 1$ , montrer que  $|\int_{C_{R+}} f(z)dz| \leq \frac{\pi}{R(R^2 - 1)}$ .

4. Donner  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_{r-}} f(z)dz$ .

5. En déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 7 :** Soit la fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{1 + x^3}$ .

1. Etablir la convergence de  $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ .

On considère  $\gamma^+$  le contour formé par le segment  $[0, R]$ , le  $\frac{3}{8}$  de cercle (supérieur)  $C_{R+}$  de centre 0 et de rayon  $R$ , le segment liant le point d'affixe  $z_0 = Re^{\frac{2i\pi}{3}}$  et l'origine.



2. Calculer  $I$  par la méthode de résidus.

**Exercice 8 :** Soit la fonction  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}$ .

1. Etablir la convergence de  $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ .

On considère la fonction complexe  $f(z) = \frac{\ln(z)}{(1+z^2)^2}$ , définie sur le demi-plan  $y \geq 0$ .  
On prend une détermination de  $\ln(z)$  définie par :

$$\ln(z) = \ln|z| + i\theta, \quad \text{avec } 0 \leq \arg(z) = \theta \leq \pi.$$

Ainsi, si  $x > 0$ ,  $\ln(-x) = \ln(x) + i\pi$ . On considère  $\gamma^+$  le contour formé par le segment  $[-R, -r]$ , le demi-cercle supérieur  $C_{r-}$  de centre 0 et de rayon  $r$ , le segment  $[r, R]$  et le demi-cercle supérieur  $C_{R+}$  de centre 0 et de rayon  $R > 0$ .

2. En utilisant un développement en série de Taylor, étudier la singularité de  $f$  au point  $z_0 = i$  et donner le résidu correspondant puis calculer  $\int_{\gamma^+} f(z)dz$ .

3. Montrer que  $\left| \int_{C_{R+}} f(z)dz \right| \leq \pi R \frac{(|\ln(R)| + \pi)}{(R^2 - 1)^2}$ . En déduire  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_{R+}} f(z)dz$ .

4. Trouver une majoration de  $\int_{C_{r-}} f(z)dz$ . En déduire que  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_{r-}} f(z)dz = 0$ .

5. En déduire la valeur de  $I$  et  $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ .

**Exercice 9 :** Par la méthode des résidus calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(7\theta)}{2 + \sin(\theta)} d\theta.$$