Exercice 1 : Donner les coefficients de Fourier des fonctions f 2π-périodiques telles que :

$$a) f(x) = x \quad \text{sur} \quad [-\pi, \pi[\qquad b) f(x) = \pi - \mid x \mid \quad \text{sur} \quad]-\pi, \pi[$$
$$d) f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{sur} \quad [0, 2\pi[\qquad e) f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ -e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[. \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = x^2$.
   (a) Développer f en série de Fourier.
   (b) Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
2. Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall x \in [0, 2\pi[, f(x) = x^2$.
3. Développer f en série de Fourier et calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$
4. Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|$. Calculer les sommes suivantes
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie sur $[0, \pi]$, par $f(x) = x(\pi - x)$.

1. Calculer les coefficients de Fourier associés à f.
2. Montrer que la série de Fourier associée à f est convergente, et calculer sa somme $SF(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.
4. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$.

Exercice 4 :

1. La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction f de classe C^1 par morceaux, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$?
2. La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction g continue par morceaux, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 : Soit $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$, par $f(x) = \cos(ax)$.

1. Calculer les coefficients de Fourier associés à f.
2. Calculer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - a^2}$. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$$\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{t} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t}{\pi^2 n^2 - t^2}.$$

Exercice 6 : Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$, par $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et la série de Fourier de f.
3. Montrer que la série de Fourier associée à f est convergente, et calculer sa somme $SF(x)$ sur $[-\pi, \pi]$.
4. Déduire la somme de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$, puis donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$.
5. Montrer que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $\quad |\sin x| = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(kx)}{4k^2 - 1}$.

Exercice 7 :

1. Soit f la fonction de période 2π et impaire, égale à $\frac{\pi - x}{2}$ sur $]0, \pi]$.
   (a) Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier et la série de Fourier de f. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$.
2. On considère maintenant la fonction g de période 2π et impaire définie sur $[0, \pi]$ par
$$g(x) = \begin{cases} xf(1) & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ f(x) & \text{si} \quad x \in [1, \pi]. \end{cases}$$
   (a) Tracer le graphe de la fonction g sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de g.
   (c) Montrer que la série de Fourier de g est égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin(nx)$.
   (d) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$.
3. Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2.$$