Exercice 1 : Donner les coefficients de Fourier des fonctions f 2π-périodiques telles que :

$$a) f(x) = x \quad \text{sur} \quad [-\pi, \pi[\qquad b) f(x) = \pi - \mid x \mid \quad \text{sur} \quad]-\pi, \pi[$$
$$d) f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{sur} \quad [0, 2\pi[\qquad e) f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0]. \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = x^2$.
   (a) Développer f en série de Fourier.
   (b) Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
2. Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall x \in [0, 2\pi[, f(x) = x^2$.
   (a) Développer f en série de Fourier.
   (b) Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$
3. Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|$. Calculer les sommes suivantes
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 3 : Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = e^x$.

1. Chercher le développement en série de Fourier de f.
2. En déduire les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 4 : Soit f une fonction 2π-périodique et de classe C^1.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$, calculer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$.
2. On suppose que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^2 dx \leq \int_0^{2\pi} \mid f'(x) \mid^2 dx$.

Exercice 5 :

1. Montrer que la série de Fourier de la fonction 2π-périodique $g(x) = \mid \cos(x) \mid$ est
$$SF(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}.$$
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

3. La série de Fourier $SF(x)$ est-elle normalement convergente?

4. Justifier que : $\forall x, \quad |cosx| = SF(x)$.

Exercice 6 : Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$, par $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f et la série de Fourier de f.

3. Montrer que la série de Fourier associée à f est convergente, et calculer sa somme $SF(x)$ sur $[-\pi, \pi]$.

4. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$.

5. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$.

6. Montrer que pour tout $x \in [-\pi, \pi], \quad |\sin x| = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(kx)}{4k^2 - 1}$.

Exercice 7 :

1. Soit f la fonction de période 2π et impaire, égale à $\dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]0, \pi]$.
   (a) Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier et la série de Fourier de f. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$.

2. On considère maintenant la fonction g de période 2π et impaire définie sur $[0, \pi]$ par

$$g(x) = \begin{cases} xf(1) & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ f(x) & \text{si} \quad x \in [1, \pi]. \end{cases}$$

   (a) Tracer le graphe de la fonction g sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de g.
   (c) Montrer que la série de Fourier de g est égale à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin(nx)$.
   (d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$.

3. Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2.$$