Exercice 1 : Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On suppose que la fonction f est holomorphe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est constante.
   (b) $Re(f)$ est constante.
   (c) $Im(f)$ est constante.
2. En déduire que la fonction f définie par $f(z) = |z|$ n'est pas holomorphe.

Exercice 2 :

1. Calculer l'intégrale $I = \int_\Gamma \bar{z}dz$, où Γ est le chemin joignant le point $(1,1)$ au point $(2,4)$ le long de la parabole d'équation $y = x^2$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_\Gamma (z^2 + 3z)dz$, où Γ est définie par $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ du point $(2,0)$ au point $(0,2)$.
3. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et Γ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
   Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}$.

Exercice 3 : Déterminer la nature des singularités isolées des fonctions suivantes et préciser la valeur des résidus :

$$a)\ \frac{1-\cos(z)}{z^2} \qquad b)\ \tan(z) \qquad c)\ \frac{z^3+1}{z(z-i)^3} \qquad d)\ \exp(\tfrac{1}{z^2}).$$

Exercice 4 : Soient les fonction f et g définies par :

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

1. Déterminer les développements de f et g en série de Laurent dans les trois cas suivant :
   (a) $0 < |z| < 1$,
   (b) $1 < |z| < 2$,
   (c) $|z| > 2$.
2. Calculer $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, où γ est le cercle de centre $\frac{-3}{2}$ et de rayon 1.

Exercice 5 : Déterminer les singularités et les résidus dans $\mathbb{C}$ de $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-2z+2)(z^2+1)}$.

Puis trouver la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+2)(x^2+1)}$.

Exercice 6 : Soit $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx$.

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
   Soit f la fonction complexe définie par $\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$. On considère γ^+ le contour formé par le segment $[-R,-r]$, le demi-cercle supérieur C_{r^-} de centre 0 et de rayon r, le segment $[r,R]$ et le demi-cercle supérieur C_{R^+} de centre 0 et de rayon $R>0$.

2. Etudier les singularités de f et donner les résidus correspondants puis calculer $\displaystyle\int_{\gamma^+} f(z)dz$ suivant les valeurs de R.

3. (a) Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad \sin(x) \geq \dfrac{2x}{\pi}$ et que $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\sin(\theta)}d\theta \leq \frac{\pi}{R}$.

   (b) Pour $R>1$, montrer que $\displaystyle|\int_{C_{R^+}} f(z)dz| \leq \frac{\pi}{R(R^2-1)}$.

4. Donner $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{C_{r^-}} f(z)dz$.

5. En déduire la valeur de I.

Exercice 7 : Soit la fonction $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}$.

1. Etablir la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

   On Considère la fonction complexe $f(z) = \dfrac{\ln(z)}{(1+z^2)^2}$, définie sur le demi-plan $y \geq 0$.
   On prend une détermination de $\ln(z)$ définie par :

$$\ln(z) = \ln|z| + i\,\theta, \quad \text{avec} \quad 0 \leq arg(z) = \theta \leq \pi.$$

   Ainsi, si $x>0$, $\ln(-x) = \ln(x) + i\pi$. On considère γ^+ le contour formé par le segment $[-R,-r]$, le demi-cercle supérieur C_{r^-} de centre 0 et de rayon r, le segment $[r,R]$ et le demi-cercle supérieur C_{R^+} de centre 0 et de rayon $R>0$.

2. En utilisant un développement en série de Taylor, étudier la singularité de f au point $z_0 = i$ et donner le résidu correspondant puis calculer $\int_{\gamma^+} f(z)dz$.

3. Montrer que $\left| \int_{C_{R+}} f(z)dz \right| \leq \pi R \frac{(|\ln(R)| + \pi)}{(R^2-1)^2}$. En déduire $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_{R+}} f(z)dz$.

4. Trouver une majoration de $\int_{C_{r^-}} f(z)dz$. En déduire que $\lim_{r\to 0} \int_{C_{r^-}} f(z)dz = 0$.

5. En déduire la valeur de I et $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 8 : Dans tout cet exercice C_R est le carré centré en l'origine et de côté $2R$, parcouru dans le sens direct.

1. Déterminer les singularités et les résidus de la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$.
2. Déterminer en fonction de $R > 0$ la valeur de $\int_{C_R} f(z)dz$.
3. Déterminer les singularités et les résidus de la fonction $g(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-2)^2}$.
4. Déterminer en fonction de $R > 0$ la valeur de $\int_{C_R} g(z)dz$.
5. Déterminer en fonction de $R > 0$ la valeur de $\int_{C_R} \frac{z^2\sin(z)}{(z-\pi)^2}dz$.

Exercice 9: Déterminer les valeurs des intégrales suivantes :

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4} \qquad b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)dx}{x^4+4} \qquad c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)dx}{x^2-1}.$$

Exercice 10 : Par la méthode des résidus calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(7\theta)}{2+\sin(\theta)}d\theta.$$