

Exercice 1 : Donner les coefficients de Fourier des fonctions f 2π -périodiques telles que :

$$\begin{aligned} a) f(x) &= x \quad \text{sur} \quad]-\pi, \pi[& b) f(x) &= \pi - |x| \quad \text{sur} \quad]-\pi, \pi[\\ d) f(x) &= \frac{\pi - x}{2} \quad \text{sur} \quad [0, 2\pi[& e) f(x) &= \begin{cases} e^x & \text{si } x \in]0, \pi[\\ e^{-x} & \text{si } x \in]-\pi, 0]. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. Soit f la fonction 2π -périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = x^2$.

(a) Développer f en série de Fourier.

(b) Calculer les sommes suivantes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

2. Soit f la fonction 2π -périodique telle que : $\forall x \in [0, 2\pi[, f(x) = x^2$.

(a) Développer f en série de Fourier.

(b) Calculer les sommes suivantes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

3. Soit f la fonction 2π -périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 3 : Soit f la fonction 2π -périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = e^x$.

1. Chercher le développement en série de Fourier de f .

2. En déduire les sommes suivantes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

Exercice 4 : Soit f une fonction 2π -périodique et de classe C^1 .

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$, calculer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$.

2. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. Montrer que : $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx$.

Exercice 5 :

1. Montrer que la série de Fourier de la fonction 2π -périodique $g(x) = |\cos(x)|$ est

$$SF(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}.$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$.



3. La série de Fourier $SF(x)$ est-elle normalement convergente?

4. Justifier que : $\forall x, |\cos x| = SF(x)$.

Exercice 6 : Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$, par $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f et la série de Fourier de f .

3. Montrer que la série de Fourier associée à f est convergente, et calculer sa somme $SF(x)$ sur $[-\pi, \pi]$.

4. En déduire la somme de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$.

5. Donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$.

6. Montrer que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $|\sin x| = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(kx)}{4k^2 - 1}$.

Exercice 7 :

1. Soit f la fonction de période 2π et impaire, égale à $\frac{\pi - x}{2}$ sur $]0, \pi]$.

(a) Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Calculer les coefficients de Fourier et la série de Fourier de f . En déduire la valeur

$$\text{de } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

2. On considère maintenant la fonction g de période 2π et impaire définie sur $[0, \pi]$ par

$$g(x) = \begin{cases} xf(1) & \text{si } x \in [0, 1] \\ f(x) & \text{si } x \in [1, \pi]. \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de la fonction g sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Calculer les coefficients de Fourier de g .

(c) Montrer que la série de Fourier de g est égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin(nx)$.

(d) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$.

3. Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2.$$