Exercice 1 : Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que la fonction f est holomorphe

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est constante.
   (b) $Re(f)$ est constante.
   (c) $Im(f)$ est constante.

   En déduire que la fonction f définie par $f(z) = |z|$ n'est pas holomorphe.
2. On pose pour tout élément $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$, $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. On suppose qu'il existe des nombres réels non nuls a, b, c tel que : $aP(x, y) + bQ(x, y) = c$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est constante.

Exercice 2 :

1. Calculer l'intégrale $I = \int_\Gamma \bar{z}dz$, où Γ est le chemin joignant le point $(1, 1)$ au point $(2, 4)$ le long de la parabole d'équation $y = x^2$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_\Gamma (z^2 + 3z)dz$, où Γ est définie par $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ du point $(2, 0)$ au point $(0, 2)$.
3. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et Γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Calculer $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}$.

Exercice 3 : Déterminer la nature des singularités isolées des fonctions suivantes et préciser la valeur des résidus :

$$a)\quad \frac{1 - \cos(z)}{z^2} \qquad b)\quad \tan(z) \quad c)\quad \frac{z^3 + 1}{z(z - i)^3} \qquad d)\quad \exp(\tfrac{1}{z^2}).$$

Exercice 4 : Soient les fonction f et g définies par :

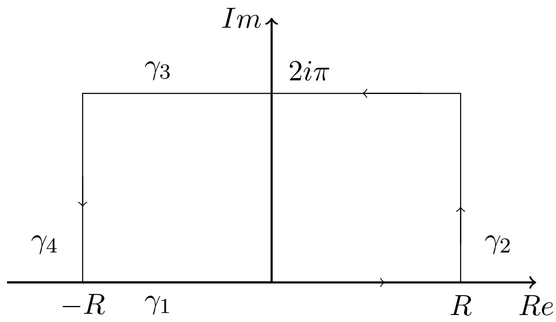
$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z + 1} + \frac{1}{z + 2} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)}$$

1. Déterminer les développements de f et g en série de Laurent dans les trois cas suivant :
   (a) $0 < |z| < 1$,
   (b) $1 < |z| < 2$,
   (c) $|z| > 2$.
2. Calculer $\int_\gamma f(z)dz$, où γ est le cercle de centre $\frac{-3}{2}$ et de rayon 1.

Exercice 5 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x}}{1+e^x}, \quad 0 < \lambda < 1.$

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

   Dans la suite, on Considère la fonction complexe définie par $f(z) = \dfrac{e^{\lambda z}}{1+e^z}$ et $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ le contour fermé suivant :



2. Quels sont les pôles de f. En utilisant un développement de e^z au voisinage de $i\pi$, donner le résidu de f au point $z_0 = i\pi$.

3. Montrer que $\left| \displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)dz \right| \leq 2\pi \dfrac{e^{\lambda R}}{e^R - 1}$. En déduire $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

4. Montrer que $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_4} f(z)dz = 0$.

5. Déduire que $I = \dfrac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$.

Exercice 6 : Soit la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}$.

1. Etablir la convergence de $I = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$.

   On Considère la fonction complexe $f(z) = \dfrac{\ln(z)}{(1+z^2)^2}$, définie sur le demi-plan $y \geq 0$. On prend une détermination de $\ln(z)$ définie par :

$$\ln(z) = \ln|z| + i\,\theta, \quad \text{avec} \quad 0 \leq arg(z) = \theta \leq \pi.$$

   Ainsi, si $x > 0$, $\ln(-x) = \ln(x) + i\pi$. On considère γ^+ le contour formé par le segment $[-R, -r]$, le demi-cercle supérieur C_{r^-} de centre 0 et de rayon r, le segment $[r, R]$ et le demi-cercle supérieur C_{R^+} de centre 0 et de rayon $R > 0$.

2. En utilisant un développement en série de Taylor, étudier la singularité de f au point $z_0 = i$ et donner le résidu correspondant puis calculer $\displaystyle\int_{\gamma^+} f(z)dz$.

3. Montrer que $\displaystyle\left|\int_{C_{R^+}} f(z)dz\right| \leq \pi R \frac{(|\ln(R)| + \pi)}{(R^2-1)^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{C_{R^+}} f(z)dz$.

4. Trouver une majoration de $\displaystyle\int_{C_{r^-}} f(z)dz$. En déduire que $\displaystyle\lim_{r\to 0} \int_{C_{r^-}} f(z)dz = 0$.

5. En déduire la valeur de I et $\displaystyle J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 7 : Par la méthode des résidus calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(7\theta)}{2+\sin(\theta)} d\theta.$$