TD N°4

Fonctions réelles : limites et continuité

Exercice 1 : Soit f une fonction $T-$périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\text{si} \quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = l \quad \text{alors} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = l.$$

Qu'en déduire pour les fonctions sinus et cosinus ?

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(\frac{1}{x}) \ \text{si} \quad x \neq 0.$$

Montrer, par deux méthodes, que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie par :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}.$$

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 4 : Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x < -2 \\ a & \text{si} \quad x = -2 \\ (ax+b)^2 & \text{si} \quad x > -2, \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes?

Exercice 6 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)\cos x$. Montrer que f est de la forme
$$f(x) = \begin{cases} \alpha\dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \alpha & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$ (montrer d'abord que : $\sin x = 2^n \sin(\frac{x}{2^n})\cos(\frac{x}{2^n})....\cos(\frac{x}{2^2})\cos(\frac{x}{2})$).

Exercice 7 :

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout x réel, $|f(x)| \leq |\sin x|$. Cette application est-elle coninue en 0.

2. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a. \quad f(x) = \sin x \sin(\frac{1}{x}) \qquad\qquad b. \quad f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}.$$

Exercice 8 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut démontrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x) = \sup_{a\leq x\leq b} f(x).$$

1. Montrer que $\sup\limits_{a<x<b} f(x) \leq \sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$.

2. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$. Montrer que $f(x_0) = \sup\limits_{a<x<b} f(x)$ en distinguant les trois cas : $x_0 = a$, $x_0 = b$ et $x_0 \in]a,b[$. Indication : Dans le cas $x_0 = a$, on pourra considérer, par exemple, la suite de réels $u_n = a + \frac{1}{n}$ et étudier la suite $(f(u_n))_n$.

3. Le résultat reste-il vrai si la fonction f n'est pas continue?

Exercice 9 : Soit f et g deux applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$. On veut démontrer suivante : "il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$".

1. On pose $h(x) = f(x) - x$. Montrer qu'il existe $s \in [0,1]$ tel que $h(s) = 0$. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $g^n(s) = f(g^n(s))$.

2. On pose $u_n = g^n(s)$. Vérifier que $f(u_n) = u_n$ et $g(u_n) = u_{n+1}$.

3. On suppose que la suite $(u_n)_n$ est monotone. Montrer qu'elle a alors une limite l. Que peut-on dire de $f(l)$ et $g(l)$.

4. On suppose que la suite $(u_n)_n$ n'est pas monotone, montrer qu'il existe des nombres u et v tels que $(f-g)(u)(f-g)(v)$ soit négatif. Conclure.

Exercice 10 : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$. Le point c est-il unique? Qu'en est-il si l'on suppose de plus que f est décroissante sur $[a,b]$.

Exercice 11 : Soit f une application définie et continue sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$, puis montrer que pour tout x réel,

$$f(-x) = -f(x).$$

2. Montrer que pour tout entier n et tout x réel

$$f(nx) = nf(x).$$

3. Montrer que pour tout rationnel q et tout x réel

$$f(qx) = qf(x).$$

4. Montrer que pour tout réel λ et pout réel x
$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Exercice 12 : Les applications suivantes sont-elles uniformément continues :

$$a)\ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \qquad b)\ f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$
$$c)\ f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ ln x.$$

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application pour laquelle il existe $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$, tel que
$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Une telle application est appelée contractante et k appelée une constante de contraction. Notre but est de démontrer que f possède un unique point fixe a *i.e.* $\exists! a \in \mathbb{R} : f(a) = a$.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = a$, alors a est unique.
3. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fixant $x_0 \in \mathbb{R}$ et en posant $x_{n+1} = f(x_n)$ ($i.e$ $x_{n+1} = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{(n+1)\ fois}(x_0) := f^{n+1}(x_0)$).

   a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|.$$

   b. En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a
   $$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{(1 - k^m)}{1 - k} k^n |x_1 - x_0|.$$

   c. Déduire que $|x_{n+m} - x_n| \longrightarrow 0$ quand $m, n \to +\infty$ et par suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

   d. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point a et que $f(a) = a$.

Application :
Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}.x$ admet 0 comme unique point fixe.