Exercice 1

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 cos(\tfrac{1}{x}) \quad \text{si} \quad x \neq 0, \; f_1(0) = 0,$$
$$f_2(x) = \sin x \sin(\tfrac{1}{x}) \quad \text{si} \quad x \neq 0, \; f_2(0) = 0,$$
$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \quad \text{si} \quad x \neq 1, \; f_3(1) = 1.$$

Exercice 2

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \;\; \text{sinon},$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

Soient x et y réels avec $0 < x < y$.
1. Montrer que

$$x < \frac{y - x}{lny - lnx} < y.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$

De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$

$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y \leq \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$

Interprétation géométrique?

Exercice 4

Par application du théorème des accroissements finis à la fonction f définie par $f(x) = lnx$ sur $[n, n + 1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers linfini quand n tend vers l'infini.

Exercice 5

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{\frac{1}{t}},$$

où P_n est un polynôme.
(a) Trouver P_1 et P_2.
(b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.

Exercice 6

Calculer les limites des fonctions f définies ci-dessous aux point indiqués

a) $f(x) = \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ $(x \to \frac{\pi}{4})$

b) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^3}{x^3 - 1}$ $(x \to 1)$

c) $f(x) = x(1 - \cos \frac{1}{x})$ $(x \to +\infty)$

d) $f(x) = x + \ln(1 - e^{2-x}) - \ln(x - 2)$ $(x \to 2)$.

Exercice 7

Déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$e^x = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Exercice 8

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$

$$\frac{1}{n^2 + 2n + 2} \leq arctan(n + 1) - arctan(n) \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

b) On pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n^2 + 1}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$

$$S_{n+1} - 1 \leq arctan(n + 1) \leq S_n.$$

En déduire aue la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ à une limite S qui vérifie

$$\frac{\pi}{2} \leq S \leq \frac{\pi}{2} + 1.$$

Exercice 9

Montrer que, quels que soit les réels x et y,

$$|arctan(x) - arctan(y)| \leq |x - y|.$$

Exercice 10

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = thx$.
a) Calculer la dérivée f''' de f en fonction de thx, et vérifier que por tout x réel positif, on a $f'(x) \leq 1$ et $f'''(x) \geq 2$.
b) En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout x réel positif, on a

$$x - \frac{x^3}{3} \leq f(x) \leq x.$$

c) En déduire que si l'on remplace $th1/4$ par $1/4$, on commet une erreur inférieur à 6.10^{-n} où n est un entier que l'on déterminera en donnant sa plus grande valeur possible, compte tenu des inégalités précédentes.

Exercice 11

a) Effectuer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$f(x) = ln\left(\frac{e^{x+cosx} - e}{x + x^2}\right).$$

En déduire que f se prolonge par continuité en 0.
b) Montrer que son prolongement est dérivable en zéro, et faire l'étude locale de la fonction au voisinage de zéro. (Equation de la tangente, position de la courbe par rapport à la tangente.)

Exercice 12

Calculer le développement limité à l'ordre 3 en zéro de la fonction f définie par

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Exercice 13

Calculer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de la fonction f définie par

$$\frac{e^{e^x} - e^{e^{-x}}}{\ln(1+x)}.$$

Exercice 14

a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de la fonction g définie par

$$g(u) = \ln \frac{\ln(1+2u)}{\ln(1+u)}.$$

b) En déduire le comportement à $+\infty$ de la fonction f définie par

$$g(u) = x \ln \frac{\ln(2+x) - \ln x}{\ln(1+x) - \ln x}.$$

(Equation de l'asymptote, position de la courbe par rapport à l'asymptote et dessin, on prendra $\ln 2 = 0,7$).