UNIVERSITE CADI AYYAD

Faculté Poly-disciplinaire Safi

Année universitaire: 2006-2007

Analyse II : TD N° 4 (SMA/SMI)

Exercice 1

Construire la courbe paramétrée plane Γ définie par $f(t) = (x(t), y(t))$ où

$$\begin{cases} x = x(t) = t^2 - 1 \\ y = y(t) = t^3 + t^2 - 1. \end{cases}$$

Exercice 2

Construire la courbe paramétrée plane Γ définie par $f(t) = (x(t), y(t))$ où

$$\begin{cases} x = x(t) = t^3 + t^2 \\ y = y(t) = t^3 - t^2. \end{cases}$$

Exercice 3

Effectuer l'étude au voisinage de 1 de la courbe paramétrée plane Γ définie par

$$\begin{cases} x = x(t) = \dfrac{1-2t}{t^2} \\ y = y(t) = e^{(t-2+\frac{1}{t})}. \end{cases}$$

Exercice 4

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (C) la courbe définie paramétriquement dans le plan par :

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^2}.$$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.
1. Montrer que (C) possède un axe de symétrie. En déduire le domaine d'étude D_e de la courbe (C).
2. Calculer les dérivées x' et y' et établir le tableau de variation de x et y.
3. Donner l'équation de la tangente à (C) au point M(1).
4. Tracer (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 5

Soit f l'application de $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (x(t), y(t))$ où

$$\begin{cases} x = x(t) = \dfrac{9t^2}{(t+1)(t-2)} \\ y = y(t) = \dfrac{3t^2(t+2)}{t+1}. \end{cases}$$

On note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
1. Calculer les dérivées x' et y' et établir le tableau de variation de x et y.
2. Etablir que C_f admet une asymptote oblique. En donner l'équation et étudier la position de C_f par rapport à cette droite.
3. Etablir que C_f admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale dont on donnera les équations.
4. En remarquant que $x(t) = \dfrac{-9t^2}{2\left(1-(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2})\right)}$, donner un développement limité de $x(t)$ et de $y(t)$ à l'ordre 4.
5. Déduire que

$$\overrightarrow{M(0)M(t)} = f(t) - f(0) = (\frac{-9}{2}, 6)t^2 + (\frac{9}{4}, -3)t^3 + (\frac{-27}{8}, 3)t^4 + o(t^4).$$

6. Faire une étude locale de C_f pour t voisin de 0. On dessinera l'allure de la courbe au voisinage du point de paramètre 0. Quelle est la nature de ce point?
7. Tracé C_f dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 6

Etudier et reprsenter la courbe paramétrée définie par $f(t) = (x(t), y(t))$ où

$$\begin{cases} x = x(t) = \dfrac{1}{\cos(\frac{t}{3})} \\ y = y(t) = \tan t. \end{cases}$$

On détaillera les points suivants :
• Réduction du domaine d'étude.
• Recherche de la valeur t_0 de l'intervalle d'étude, pour laquelle la courbe admet une asymptote oblique et étude de la position de la courbe par rapport à cette asymptote lorsque t tend vers t_0.
• Recherche des points d'intersections avec les axes.
• Tracé de l'arc générateur, puis reconstitution de la courbe complète en expliquant la méthode utilisée.