UNIVERSITE CADI AYYAD — Année universitaire: 2006-2007

Faculté Poly-disciplinaire Safi — Analyse IV : TD N° 3 (SMA)

Exercice 1

Soit α la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\alpha(x,y) = (2xy^3+1)dx + (3x^2y^2 - 2y)dy$$

1) α est-elle fermée?
2) α est-elle exaxte? Si oui trouver les primitives de α.

Exercice 2

Soit α la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\alpha(x,y) = 3x^2y dx + (x^3 - \sin(y))dy$$

1) α est-elle fermée?
2) α est-elle exaxte? Si oui trouver les primitives de α.

Exercice 3

1) Monter que la forme différentielle $\alpha(x,y) = \dfrac{x-y}{x}dx + dy$ n'est pas fermée.
2) Montrer qu'il existe une fonction $f(x)$ appelée facteur intégrant telle que $\alpha_1(x,y) = f(x)\alpha(x,y)$ soit fermée.
3) La forme α_1 est-elle exacte? Si oui trouver les primitives de α_1.

Exercice 4

Soit $\alpha(x,y) = \dfrac{1}{x^2y}dx - \dfrac{1}{xy^2}dy$.
1) Montrer que α n'est pas fermée.
2) Chercher un facteur intégrant ne dépendant que de (x^2+y^2).

Exercice 5

Soit $\alpha(x,y) = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que a et b sont de C^1 et vérifie la condition $\dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{\partial b}{\partial x}$.
Trouver une fonction f telle que $\alpha = df$.

Exercice 6

Sur l'ouvert $U \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. On considère la forme différentielle α définie par :

$$\alpha(x,y,z) = \frac{(z+y)dx + (z-x)dy - (x+y)dz}{(y+z)^2}.$$

1) Démontrer que α est exacte.
2) Déterminer toutes les fonctions f définies sur U telles que $\alpha = df$.

Exercice 7

Soit la forme différentielle α d'ordre 1 définie sur $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par

$$\alpha(x,y) = Arctan(\frac{y}{x})dx + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)dy.$$

1- Montrer que α est exacte sur U.
2- Déterminer toutes les fonctions f définies sur U telles que $\alpha = df$.

Exercice 8

Calculer la circulation du vecteur $\overrightarrow{F}$ sur le périmètre Γ du trinagle (OAB) parcouru dans le sens positif, avec :

$\overrightarrow{F} = (x+y^2, x^2+y), \quad A = (2,0)$ et $B = (0,1)$.

a. Par inégrale curviligne.
b. Par application du théorème de Green-Riemann.

Exercice 9

Soit la forme différentielle α d'ordre 1 définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\alpha(x,y) = (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy.$$

1- ω est-elle exacte?
2- Calculer les deux intégrales curvilignes :

a. $C_1 = \displaystyle\int_{AB} d(x^3+y^3)$,
b. $C_2 = \displaystyle\int_{AB} -2xy(dx - dy)$,

où AB est l'arc du parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points $A = (1,1)$ et $B = (2,4)$.
3- Déduire la valeur de l'intégrale curviligne

$$C_3 = \int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy.$$

Exercice 10

Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_{\Gamma} (x^3 - y)dx + (x+y)dy$$

le long du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ parcouru dans le sens trigonométrique.

Exercice 11

Soit $a > 0$. Calculer

$$I = \int_{\Gamma} ydx + zdy$$

où Γ est le cercle d'équation

$$\begin{cases} x + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \end{cases}$$

limitant une surface orientée par le vecteur $(1,0,1)$.