

Exercice 1 : Pour chacune des séries entières suivantes de coefficients a_n , déterminer le rayon de convergence R , l'ensemble \mathcal{A} des nombres réels auxquels la série converge absolument et l'ensemble \mathcal{C} des nombres réels pour lesquels la série converge.

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{n \geq 1} \sin(n)x^n & b) \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n} x^n & c) \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{\ln n!} & d) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{ch^2 n} \\ e) \sum_{n \geq 0} n!x^n & f) \sum_{n \geq 0} e^{\sqrt{n}} x^n & g) \sum_{n \geq 0} E(\sqrt{2^n + 1})x^n & h) \sum_{n \geq 0} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) x^n. \end{array}$$

Exercice 2 : Trouver le rayon de convergence R , calculer la somme pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$, et étudier ce qui se passe si $|x| = R$ pour les séries entières suivantes :

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{n \geq 0} n^3 x^n & b) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3n+1} x^{3n+1} & c) \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)} & d) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2-1} \\ e) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} x^n & f) \sum_{n \geq 0} \frac{3n}{n+2} x^n & g) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n-1} x^n & h) \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n. \end{array}$$

Exercice 3 : Donner le développement en série entière au voisinage de 0, des fonctions f définies ci-dessous et préciser le rayon de convergence

$$\begin{array}{llll} a) f(x) = (4x+3)^{-3} & b) f(x) = (x+1) \ln(x+1) & c) f(x) = \cos(x+1) & d) f(x) = \sqrt{2-x} \\ e) f(x) = \ln(x^2-5x+6) & f) f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & g) f(x) = \frac{2}{x^2-4x+3}. \end{array}$$

Exercice 4 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe bornée par un nombre réel positif M .

1. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$? On note respectivement $f(z)$ et $g(z)$ les sommes de ces séries entières.

2. Montrer que pour tout réel $x \in]0, 1[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) e^{-\frac{t}{x}} dt$ est convergente.

3. Montrer que $\int_0^{+\infty} g(t) e^{-\frac{t}{x}} dt = x f(x)$ pour tout réel $x \in]0, 1[$.

Exercice 5 : Soit la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$, où $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2. Etudier la convergence de cette série en R et en $-R$.

3. On note par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ la somme de cette série. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x)$ existe.



Exercice 6 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie sur \mathbb{N} par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < a_n \leq 2^n$.
2. En déduire que si $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.
3. Que dire alors du rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite convergente définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
 - (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.
 - (b) En déduire la valeur de R .
5. Pour tout $|x| < R$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dans la suite, on pose $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.
 - (a) Montrer que pour tout $|x| < R$ on a : $(1 - x - x^2)f(x) = x$.
 - (b) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $Q(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$.
 - (c) En déduire a_n en fonction de α et β pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : On considère $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n x^n$.
2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : (1 - 4x)y' - 2y = 0$$
3. Résoudre l'équation différentielle (E) .
4. En déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 8 : Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + xy' + y = 0,$$

d'inconnue la fonction y . Chercher la série entière solution de l'équation (E) vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 9 : Soit $\sum \sin^2(n)x^n$ une série entière.

1. Trouver le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Calculer la somme de cette série lorsque $x \in]-R, R[$.