Exercice 1 : Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières ayant respectivement R et R' pour rayon de convergence. Montrer que :

1. si à partir d'un certain rang $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R' \leq R$.
2. si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R = R'$.

Exercice 2 : Pour chacune des séries entières suivantes de coefficients a_n, déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres réels lesquels la série converge absolument et l'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres réels pour lesquels la série converge.

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) x^n \quad b)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln\ n} x^n \quad c)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln\ n!} \quad d)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{ch^2\, n}$$

$$e)\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad f)\sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} x^n \quad g)\sum_{n=0}^{\infty} E(\sqrt{2^n+1}) x^n \quad h)\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^2})\, x^n.$$

Exercice 3 : Trouver le rayon de convergence R, calculer la somme pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$, et étudier ce qui se passe si $|x| = R$ pour les séries entières suivantes :

$$a)\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n \quad b)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} x^{3n+1} \quad c)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \quad d)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$$

$$e)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} x^n \quad f)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{n+2} x^n \quad g)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^n \quad h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n.$$

Exercice 4 : Donner le développement en série entière au voisinage de 0, des fonctions f définies ci-dessous et préciser le rayon de convergence

$$a) f(x) = (4x+3)^{-3} \quad b) f(x) = (x+1)\ln(x+1) \quad c) f(x) = \cos(x+1) \quad d) f(x) = \sqrt{2-x}$$

$$e) f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6) \quad f) f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \quad g) f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}.$$

Exercice 5 : Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

$$a)\sum_n \frac{n+2}{n+1} x^n \quad b)\sum_n \frac{n^3}{n!} x^n.$$

Exercice 6 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < a_n \leq 2^n$.
2. En déduire que si $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.
3. Que dire alors du rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite convergente définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

   (b) En déduire la valeur de R.

5. Pour tout $|x| < R$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dans la suite, on pose $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

   (a) Montrer que pour tout $|x| < R$ on a : $(1 - x - x^2)f(x) = x$.

   (b) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $Q(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$.

   (c) En déduire a_n en fonction de α et β pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : On considère $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_n a_n x^n$.

2. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : (1 - 4x)y' - 2y = 0$$

3. Résoudre l'équation différentielle (E).

4. En déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 8 : Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + xy' + y = 0,$$

d'inconnue la fonction y. Chercher la série entière solution de l'équation (E) vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 9 : Soit $\sum \sin^2(n)x^n$ une série entière.

1. Trouver le rayon de convergence R de cette série entière.

2. Calculer la somme de cette série lorsque $x \in]-R, R[$.