Exercice 1 : Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\omega(x,y) = (2xy^3+1)dx + (3x^2y^2-2y)dy$$

ω est-elle fermée? ω est-elle exaxte? si oui trouver les primitives de ω.

Exercice 2 : Soit ω la forme différentielle définie sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$ par :

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

ω est-elle fermée? ω est-elle exaxte? si oui trouver les primitives de ω.

Exercice 3 :

1. Monter que la forme différentielle $\omega(x,y) = \dfrac{x-y}{x}dx + dy$ n'est pas fermée sur son domaine de définition.
2. Montrer qu'il existe une fonction $f(x)$ appelée facteur intégrant telle que $\omega_1(x,y) = f(x)\omega(x,y)$ soit fermée.
3. La forme ω_1 est-elle exacte? si oui trouver les primitives de ω_1.

Exercice 4 : Soit $\omega(x,y) = \dfrac{1}{x^2y}dx - \dfrac{1}{xy^2}dy$.

1. Montrer que ω n'est pas fermée sur son domaine de définition.
2. Chercher un facteur intégrant ne dépendant que de (x^2+y^2).

Exercice 5 : Soit $\omega(x,y) = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que a et b sont de C^1 et vérifie la condition $\dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{\partial b}{\partial x}$.
Trouver une fonction f telle que $\omega = df$.

Exercice 6 : Sur l'ouvert $U \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. On considère la forme différentielle ω définie par :

$$\omega(x,y,z) = \frac{(z+y)dx + (z-x)dy - (x+y)dz}{(y+z)^2}.$$

1. Démontrer que ω est exacte.
2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur U telles que $\omega = df$.

Exercice 7 : Soit Γ la courbe constituée des deux portions de courbes comprises entre les points $O = (0,0)$ et $A = (1,1)$ d'intersection de deux paraboles d'équations $y = 2x - x^2$ et $y = x^2$, orientée dans le sens trigonométrique.

1. Tracer Γ.
2. Calculer $I = \int_\Gamma (y + xy)dx$.
3. En utilisant la formule de Green-Riemann, retrouver la valeur de I.

Exercice 8 : Soit ω la forme différentielle définie sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par :

$$\omega(x,y) = \frac{-y+x}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

1. ω est-elle fermée?
2. Montrer que ω n'est pas exacte.

Exercice 9 : Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$. Soit Γ le bord orienté de K, et ω la forme différentielle

$$\omega(x,y) = xy^2 + 2xydy.$$

Calculer $\int_\Gamma \omega$ par :

1. inégrale curviligne.
2. application du théorème de Green-Riemann.

Exercice 10 : Soit la forme différentielle ω d'ordre 1 définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega(x,y) = (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy.$$

1- ω est-elle exacte?
2- Calculer les deux intégrales curvilignes :

a. $I_1 = \int_{AB} d(x^3 + y^3)$,

b. $I_2 = \int_{AB} -2xy(dx - dy)$,

où AB est l'arc du parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points $A = (1,1)$ et $B = (2,4)$.
3- Déduire la valeur de l'intégrale curviligne

$$I_3 = \int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy.$$

Exercice 11 : Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_\Gamma (x^3 - y)dx + (x+y)dy$$

le long du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ parcouru dans le sens trigonométrique.