Exercice 1 : Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières ayant respectivement R et R' pour rayon de convergence. Montrer que :

1. si à partir d'un certain rang $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R' \leq R$.
2. si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R = R'$.

Exercice 2 : Pour chacune des séries entières suivantes de coefficients a_n, déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres réels lesquels la série converge absolument et l'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres réels pour lesquels la série converge.

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)x^n \qquad b)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln\ n}x^n \qquad c)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln\ n!} \qquad d)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{ch^2\, n}$$

$$e)\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n \qquad f)\sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}}x^n \qquad g)\sum_{n=0}^{\infty} E(\sqrt{2^n+1})x^n \qquad h)\sum_{n=0}^{\infty} (\ln(n!))^2\, x^n.$$

Exercice 3 : Trouver le rayon de convergence R, calculer la somme pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$, et étudier ce qui se passe si $|x| = R$ pour les séries entières suivantes :

$$a)\sum_{n=0}^{\infty} n^3x^n \qquad b)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}x^{3n+1} \qquad c)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \qquad d)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$$

$$e)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}x^n \qquad f)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{n+2}x^n \qquad g)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1}x^n \qquad h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}x^n.$$

Exercice 4 : Donner le développement en série entière au voisinage de 0, des fonctions f définies ci-dessous et préciser le rayon de convergence

$$a)f(x) = (4x+3)^{-3} \quad b)f(x) = (x+1)\ln(x+1) \quad c)f(x) = \cos(x+1) \quad d)f(x) = \sqrt{2-x}$$

$$e)f(x) = \ln(x^2-5x+6) \qquad f)f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \qquad g)f(x) = \frac{2}{x^2-4x+3}.$$

Exercice 5 : Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

$$a)\sum_n \frac{n+2}{n+1}x^n \qquad b)\sum_n \frac{n^3}{n!}x^n.$$

Exercice 6 : On considère $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n x^n$.
2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : (1-4x)y' - 2y = 0$$

3. Résoudre l'équation différentielle (E).
4. En déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 7 : Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + xy' + y = 0,$$

d'inconnue la fonction y. Chercher la série entière solution de l'équation (E) vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 8 : Soit $\sum \sin^2(n)x^n$ une série entière.

1. Trouver le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Calculer la somme de cette série lorsque $x \in]-R, R[$.

Exercice 9 : Soit (u_n) une suite de réels qui converge vers l.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$.
2. On note S la somme de la série entière précédente. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} S(x) = l$.