Exercice 1 : Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\omega(x,y) = (x+y)dx + (x-y)dy$$

1. ω est-elle fermée? ω est-elle exaxte? si oui trouver les primitives de ω.
2. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante: $x + y + (x-y)y' = 0, \ y(0) = 0$.

Exercice 2 : Soit ω la forme différentielle définie sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$ par :

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

ω est-elle fermée? ω est-elle exaxte? si oui trouver les primitives de ω.

Exercice 3 :

1. Monter que la forme différentielle $\omega(x,y) = \dfrac{x-y}{x}dx + dy$ n'est pas fermée sur son domaine de définition.
2. Montrer qu'il existe une fonction $f(x)$ appelée facteur intégrant telle que $\omega_1(x,y) = f(x)\omega(x,y)$ soit fermée.
3. La forme ω_1 est-elle exacte? si oui trouver les primitives de ω_1.

Exercice 4 : Soit $\omega(x,y) = \dfrac{1}{x^2y}dx - \dfrac{1}{xy^2}dy$.

1. Montrer que ω n'est pas fermée sur son domaine de définition.
2. Chercher un facteur intégrant ne dépendant que de (x^2+y^2).

Exercice 5 : Sur l'ouvert $U \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. On considère la forme différentielle ω définie par :

$$\omega(x,y,z) = \frac{(z+y)dx + (z-x)dy - (x+y)dz}{(y+z)^2}.$$

1. Démontrer que ω est exacte.
2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur U telles que $\omega = df$.

Exercice 6 : Soit ω la forme différentielle définie sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par :

$$\omega(x,y) = \frac{-y+x}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

1. ω est-elle fermée?
2. Montrer que ω n'est pas exacte.

Exercice 7 : Soient g une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, G sa primitive et $A = (0, \frac{\pi}{2})$ et $B = (\frac{\pi}{2}, 0)$ deux points dans le plan $\mathbb{R}^2$. Soit $\omega(x, y) = g(\sin x + \cos y)\cos x\ dx - g(\sin x + \cos y)\sin y\ dy$ une forme différentielle de degré un.

1. Calculer $d\omega$.
2. Montrer que ω est exacte et trouver toutes les fonctions $h(x, y)$ dont la différentielle donne $\omega(x, y)$.
3. Démontrer que l'intégrale curviligne $\int_A^B \omega$ ne depend pas du choix de chemin reliant A et B.
4. Calculer cette intégrale pour $g(u) = \dfrac{1}{|u| + 1}$.

Exercice 8 : Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Soit Γ le bord orienté de K, et ω la forme différentielle

$$\omega(x, y) = xy^2 + 2xydy.$$

Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ par :

1. inégrale curviligne.
2. application du théorème de Green-Riemann.

Exercice 9: Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$. Soit la forme différentielle définie sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ par :

$$\omega(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}\big[(x\sin(x) - y\cos(x))dx + (x\cos(x) + y\sin(x))dy\big].$$

1. Montrer que ω est fermée sur U.

   On considère γ^+ le contour formé par le segment $[-R, -r]$, le demi-cercle supérieur C_{r^-} de centre 0 et de rayon r, le segment $[r, R]$ et le demi-cercle supérieur C_{R^+} de centre 0 et de rayon $R > 0$.
2. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin(x) \geq \dfrac{2x}{\pi}$ et que $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_0^\pi e^{-R\sin(\theta)} \cos(R\cos(\theta))d\theta = 0$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{r \to 0} \int_0^\pi e^{-r\sin(\theta)} \cos(r\cos(\theta))d\theta = \pi$.
4. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma^+} \omega$. En déduire la valeur de I.