# TD N°3
## Topologie de $\mathbb{R}$

### Exercice 1
Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si $A \subseteq B$ alors $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$ .
3. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Peut-on avoir toujours $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?
4. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$. Cette égalité est-elle vraie pour une réunion infinie?
5. Si $A \subseteq B$ alors $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.
6. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
7. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$. Peut-on avoir toujours $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$?

### Exercice 2
Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre :

*a.* $A = ]-1, 1[ \cup ]2, 3]$    *b.* $A = ]3, 4[ \cup \{0\}$    *c.* $A = [2, 3] \cup \{0\}$

*d.* $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$    *e.* $A = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \geq 3\}$    *f.* $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\}$

*g.* $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$    *h.* $A = \{(-1)^n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.

### Exercice 3

1. Monter que 2 est un point adhérent à $A = ]2, 3] \cup \{4\}$. 2 Est-il point d'accumulation? 4 est-il un point d'accumulation de $A$?
2. Montrer que 1 est un point d'accumulation de l'ensemble $A = \left\{ \dfrac{n-1}{n+1} \quad : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$.

### Exercice 4

1. Soient $x, y$ deux réels tels que $y - x > 1$. Montrer qu'il existe un unique $p$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $x < p < y$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. On considère l'ensemble $D$ défini par:
$$D = \left\{ \frac{m}{2^n} \quad : \quad m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   a. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^N} < b - a$.
   b. Montrer qu'on peut trouver $m \in \mathbb{Z}$ tel que $2^N a < m < 2^N b$.

c. En déduire que $D$ est dense dans $\mathbb{R}$.

d. Existe-t-il une suite d'éléments de $D$ qui converge vers $\pi$ ?

e. Montrer que si $E$ vérifie $D \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$, alors $E$ est dense dans $\mathbb{R}$.

## Exercice 5

On va montrer que l'ensemble $D$ des réels de la forme $p+q\sqrt{2}$ où $p$ et $q$ décrivent $\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $D$ est stable par addition et multiplication.
2. Posons $v = \sqrt{2} - 1$, montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver un entier $N \geq 1$ tel que $0 < v^N < b - a$.
3. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a < mv^N < b$.
4. Déduire que $D$ est dense dans $\mathbb{R}$.

## Exercice 6

On va montrer que l'ensemble $D$ des réels de la forme $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ où $m$ et $n$ décrivent $\mathbb{N}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Trouver la limite de la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
2. Montrer que pour tous couple $(a, b)$ de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$, on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{N+1} - \sqrt{N} < b - a$.
3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a < p(\sqrt{N+1} - \sqrt{N}) < b$.
4. Déduire que $D$ est dense dans $\mathbb{R}$.

## Exercice 7

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $A$ est convexe si, et seulement si,

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \forall t \in [0, 1], \ \ (1 - t)x + ty \in A.$$

1. Montrer que $]3, 4] \cup \{5\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne sont pas convexes.
2. Montrer que $A$ est convexe si et seulement si, $\forall x, \forall y \in A, \ [x, y] \subseteq A$.
3. Montrer que, si $A$ est convexe, son adhérence $\overline{A}$ et son intérieur $\overset{\circ}{A}$ sont convexes aussi.
4. Soient $A$ une partie convexe de $\mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, ..., x_n$ des points de $A$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in A.$$
5. Montrer que : $A$ est un convexe de $\mathbb{R}$ si et seulement si $A$ est un intervalle.
6. Soit $A$ une partie non vide et convexe dans $\mathbb{R}$. Montrer que

a. si $A$ n'est ni majorée ni minorée alors $A = \mathbb{R}$.

b. si $A$ est minorée et non majorée (resp. non minorée et majorée) alors $A$ est un intervalle de type $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, b[$ ou $]-\infty, b]$).

c. si $A$ est bornée alors $A$ est un intervalle de type $[a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$.

## Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < \frac{1}{2}$, tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq k(|f(x) - x| + |f(y) - y|) \qquad (1).$$

Le but de cet exercice est de démontrer que $f$ possède un unique point fixe $a \in \mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe un unique point $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = a$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Montrer que $a = b$.

   On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}$ de la manière suivante : $x_0 \in \mathbb{R}$ est quelconque et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$

2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|.$$

3. En déduire que, que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^n |x_1 - x_0|.$$

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$,
$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{1-k}{1-2k}\left(\frac{k}{1-k}\right)^n |x_1 - x_0|.$$

5. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}$. On notera $a$ sa limite.

6. Vérifier $f(a) = a$. Pour cela, on utilisera l'inégalité (1) avec $x = x_k$ et $y = a$.

7. Conclure.