Exercice 1 Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, F sa fonction de répartition et U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Si F est continue et strictement croissante, quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?

2. Dans le cas général on définit F^{-1}, l'inverse généralisé de F par :

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1.$$

Quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$Y = \limsup_n \frac{X_n}{\ln\, n}.$$

Le but est de démontrer que $Y = \dfrac{1}{\lambda}$ p.s.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_n \Big\{\frac{X_n}{\ln\, n} \geq \frac{1}{\lambda}\Big\}\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\limsup_n \frac{X_n}{\ln\, n} \geq \frac{1}{\lambda}\Big).$$

2. Montrer que $\mathbb{P}\Big(\limsup_n \Big\{\dfrac{X_n}{\ln\, n} \geq \dfrac{1}{\lambda}\Big\}\Big) = 1$. En déduire que $\mathbb{P}\Big(Y \geq \dfrac{1}{\lambda}\Big) = 1$.

3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_n \frac{X_n}{\ln\, n} > \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\limsup_n \Big\{\frac{X_n}{\ln\, n} > \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\Big\}\Big).$$

4. Soit $\varepsilon > 0$, prouver que

   (a) $\mathbb{P}\Big(\limsup_n \Big\{\dfrac{X_n}{\ln\, n} > \dfrac{1+\varepsilon}{\lambda}\Big\}\Big) = 0.$

   (b) $\mathbb{P}\Big(Y > \dfrac{1+\varepsilon}{\lambda}\Big) = 0.$

5. En déduire que $\mathbb{P}\Big(Y = \dfrac{1}{\lambda}\Big) = 1.$

6. Montrer que la suite $\Big(\dfrac{X_n}{\ln\, n}\Big)_{n\geq 2}$ converge vers 0 en probabilité.

Exercice 3 Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes intégrables de même loi. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est indépendante de la variable N. On pose

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad N = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} X_i & \text{si} \quad N \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que Z est une variable aléatoire.

2. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.
3. On suppose que les variables X_i sont de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ $(P\{X_i = 1\} = p)$ et N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

   Déterminer la loi de Z.

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que la loi de X_n est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n,\ \mathbb{P}(X_n = x_n) = p_n \quad \text{où} \quad 0 < p_n < 1 \quad \text{et} \quad x_n \geq 1.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
   a. converge vers 0 presque sûrement.
   b. converge vers 0 dans L^p, $p \geq 1$.
   c. converge vers 0 en probabilité.
   d. converge vers 0 en loi.
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires tels que :
   a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 mais pas dans L^1.
   b. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans L^p pour tout $p \geq 1$ mais ne converge pas vers 0 presque sûrement.
   c. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0 sans converger presque sûrement.

Exercice 5

1. Soit $(p_n)_n$ une suite de réels dans $]0,1[$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. telles que pour tout n, X_n est une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ et X une v.a. de loi de poisson de paramètre λ. Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers X.
2. Soit (X_n) une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la limite en loi de la suite $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} X_k$.

Exercice 6 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi telle que $\mathbb{E}(X_1)^2 < +\infty$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $\quad M_n = \dfrac{S_n}{n}$ et $q_n = [\sqrt{n}\,]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \geq 0$.
   a. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (M_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.
   b. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\frac{q_n^2}{n} Z_{q_n} \leq M_n \leq \frac{(q_n+1)^2}{n} Z_{q_n+1}.$$
   c. En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.

2. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 7 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n = \dfrac{1}{S_n}$.

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.
2. Montrer que la suite $(\dfrac{nS_n - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on donnera la loi.
3. Soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, montrer qu'il existe un unique $\phi \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbb{P}(|N| \leq \phi) = 0.95$.
4. Déterminer β tel que $\mathbb{P}(S_n \in I = [\frac{1}{\lambda} - \beta, \frac{1}{\lambda} + \beta]) = 0.95$.
5. Déterminer α_1 et α_2 tels que $\mathbb{P}(Z_n \in J = [\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2]) = 0.95$
6. Donner J, en fonction de λ inconnu, pour $n = 10000$ et $\phi = 1.96$.

Exercice 8 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

1. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Calculer la loi de S_n.
2. Montrer que la suite $(\dfrac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y dont on donnera la loi.
3. Calculer $\mathbb{P}(\dfrac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n)) \leq 0)$.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!}$.