UNIVERSITE CADI AYYAD — Année universitaire: 2006-2007

Faculté Poly-disciplinaire Safi — Analyse 2 : TD N° 3 (SMA/SMI)

Exercice 1

Soient les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}dt.$$

1. Montrer que F et G sont continues définies sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F'(x) + G'(x) = 0,\ \forall x > 0$ et en déduire que $F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4},\ \forall x > 0$.
3. Montrer que $\mid G(x) \mid \leq \frac{\pi}{4}e^{-x^2},\ \forall x > 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 2

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt,\ x \in \mathbb{R}$.

1. Pour $n \geq 1$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_0^n e^{-t^2}\cos(xt)dt,\ x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la suite de fonctions $(F_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F_n est de classe C^1 et que la suite $(F'_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on déterminera.
3. Montrer que F satisfait l'équation différentielle $2F'(x)+xF(x) = 0$ et en déduire la valeur de F.

Exercice 3

On considère la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout entier n non nul, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.
3. Montrer que pour tout réel t strictement positif fixé, l'application $g_t : x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow t^{x-1}$ est convexe. En déduire que l'application Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.
5. Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4

On considère la fonction réelle de la variable réelle $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $D =]0, +\infty[$.
2. Montrer que F est strictement décroissante sur D.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

4.

a. Soit $A > 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^A \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

b. Montrer que $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} dt = +\infty$.

c. En déduire la limite de F en 0^+.

Exercice 5

On définit, pour $x \geq 0$, la fonctione $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

1.

a. Démontrer que F est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b. Démontrer que F est de C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On pose $k = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Montrer que f vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad F'(x) - F(x) = \frac{-k}{\sqrt{x}}.$$

2. Pour $x \geq 0$, on pose $G(x) = ke^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

a. Montrer que G vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. En déduire que F et G sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$ et retrouver la valeur de k.

Exercice 6

1. Montrer que pour tout $x > 0$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^x} dt$ est convergente. On note $f(x)$ sa valeur.
2. Soit $x > 0$. Montrer que $f(x) = \cos 1 + x \sin 1 - x(x+1)f(x+2)$.
3. Montrer que f est continue sur $[2, +\infty[$. En déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$.
4. Majorer $\mid f \mid$ sur $[2, +\infty[$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 7

On considère les fonctions F et G définies par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt.$$

1. Déterminer les ensembles de définition de F et G. Etudier la parité de ces deux fonctions.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) = \mid x \mid F(1)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, ona $0 \leq F(x) - G(x) \leq \frac{\pi}{2}$. En déduire un équivalent de G au voisinage de $+\infty$.