UNIVERSITE CADI AYYAD

Faculté Poly-disciplinaire Safi

Année universitaire: 2006-2007

Analyse I : TD N° 3 (SMA/SMI)

Exercice 1

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.
1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Longrightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|.$$

2. On suppose que f et g sont continues sur I. En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$, et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction $\sup(f, g)$ est continue sur I.

Exercice 2

Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \frac{sinx}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Exercice 3

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a. \quad f(x) = \sin x \sin(\frac{1}{x}) \qquad\qquad b. \quad f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}.$$

Exercice 4

Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}.$$

1. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 5

Soit f une application croissante de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui même, et soit

$$A = \{x \mid x \in [0, 1];\ x \leq f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne supérieure. On pose $a = \sup A$.
2. Justifier que $a \in [0, 1]$.
3. Montrer que $f(a)$ est un majorant de A. En déduire que $f(a) = a$.

Exercice 6

Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x < -2 \\ a & \text{si} \quad x = -2 \\ (ax+b)^2 & \text{si} \quad x > -2, \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout x réel, $|f(x)| \leq \sin x$. Cette

application est-elle coninue en 0.
2. En quels points, les fonctions f définies par les expressions suivantes sont-elles continues?

$$a. \quad f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0 \text{ si } & x\in\mathbb{Z} \\ x \text{ si } & x\notin\mathbb{Z}\end{array}\right. \qquad\qquad b. \quad f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0 \text{ si } & x\in\mathbb{Q} \\ x \text{ si } & x\notin\mathbb{Q}.\end{array}\right.$$

Exercice 8

1. Montrer que tourte fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré impair, s'annule en au moins un point.
2. Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a,b]$. Montrer qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que $2f(a)+3f(b)=5f(c)$.
3. Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction définie et continue sur un segment $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=c$. Le point c est-il unique? Qu'en est-il si l'on suppose de plus que f est décroissante sur $[a,b]$.

Exercice 9

On dit qu'une fonction $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall(x,y)\in I^2\ (|x-y|<\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon).$$

1. Vérifier que toute fonction uniformément continue est continue sur I. La réciproque est-elle vraie?
2. Montrer que la fonction $g:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$.
3. Démontrer le théorème suivant :

Théorème. *(Théorème de Heine 1821 -1881)*
Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

Exercice 10

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application pour laquelle il existe $k\in\mathbb{R}$, $0<k<1$, tel que

$$|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Une telle application est appelée contractante et k appelée une constante de contraction. Notre but est de démontrer que f possède un unique point fixe a *i.e.* $\exists! a\in\mathbb{R}: f(a)=a$.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que s'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=a$, alors a est unique.

3. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fixant $x_0\in\mathbb{R}$ et en posant $x_{n+1}=f(x_n)$ ($i.e$ $x_{n+1}=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{(n+1)\ fois}(x_0):=f^{n+1}(x_0)$).

a. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$|x_{n+1}-x_n|\leq k^n|x_1-x_0|.$$

b. En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que pour tout $n,m\in\mathbb{N}$ on a

$$|x_{n+m}-x_n|\leq\frac{(1-k^m)}{1-k}k^n|x_1-x_0|.$$

c. Déduire que $|x_{n+m}-x_n|\longrightarrow 0$ quand $m,n\to+\infty$ et par suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

d. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point a et que $f(a)=a$.

Application :
Montrer que l'application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}.x$ admet 0 comme unique point fixe.