UNIVERSITE CADI AYYAD	Année universitaire: 2005-2006
Faculté Poly-disciplinaire Safi	Analyse IV : TD N° 2 (SMA)

Exercice 1

1. Soient $\alpha > 0$ et f la fonction définie par $f(x) = e^{-\alpha x^2}$.
2. Vérifier que $f'(x)+2\alpha x f(x) = 0$ et que la transformée de Fourier (TF) de f satisfait l'équation

$$f'(x) + \frac{x}{2\alpha} f(x) = 0.$$

3. Trouver alors la TF de f.

Exercice 2

Soit la fonction "porte" définie par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad | x | \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

1. Calculer la TF de f.

On définit la fonction triangle par

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1- | x | & \text{si} \quad | x | \leq 1 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

2. Calculer γ' et exprimer γ' à l'aide de la fonction porte Π.
3. Déduire la TF de γ.
4. Vérifier que $\gamma = \Pi * \Pi$. Retrouver le résultat de la question 3.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{|x|}{a}}$, pour $a > 0$ donné.

1. Calculer la TF de f.
2. Calculer la TF $\mathcal{F}(xf(x))$ de la fonction $xf(x)$.
3. Calculer f', f'', puis leurs transformées de Fourier $\mathcal{F}(f'(x))$ et $\mathcal{F}(f''(x))$.
4. Déduire les transformées de Fourier des fonctions

$$f_\alpha(x) = e^{-\frac{|x|}{a}} e^{-i\alpha x}, \quad \text{avec} \quad a > 0.$$

et

$$g_b(x) = e^{-\frac{|x-b|}{a}}, \quad \text{avec} \quad a > 0.$$

5. Résoudre l'équation intégro-différentielle

$$y(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(x-u) e^{-a|u|} du = e^{-a|x|}.$$

Exercice 4

1. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad | x | \leq 1 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} e^{-u^2}$ du.

Exercice 5

Déterminer la fonction paire f telle que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\cos(sx)dx = \begin{cases} 1-k & \text{si} \quad 0 \leq k \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad k > 1, \end{cases}$$

avec k réel ≥ 0.

Exercice 6

On se donne deux fonctions guassiennes $f(x) = e^{-ax^2}$ et $g(x) = e^{-bx^2}$ où a et b sont des réels strictement positifs.
1. Déterminer la convolée de f et g.
2. Déterminer les transformées de Fourier de f et g.
3. Déterminer la transformée de Fourier de leur convolée $f * g$.
4. Que peut-on en conclure?

Exercice7

1) Calculer, en fonction de s, l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 cos(xs)dx$.
2) Trouver la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

3) Déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\right)\cos\frac{x}{2}dx.$

Exercice8

On pose

$$\Sigma = \Big\{ f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}) \mid \exists M_f > 0,\ \exists \alpha(f) > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \mid f(t) \mid \leq M_f e^{\alpha(f)t} \}.$$

1. Soit $f \in \Sigma$. Montrer que, pour tout $x > \alpha(f)$, la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(x)$ est bien définie.
2. Prouver que l'application $\mathcal{L}$ est une application linéaire de l'espace vectoriel Σ dans l'espace des fonctions de classe C^∞ sur leur domaine de définition, tendant vers 0 ainsi que toutes leurs dérivées en $+\infty$.
3. Soit $f \in \Sigma$. Montrer que, si $x > \alpha(f) + a$,

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(x) = \mathcal{L}(f)(x-a).$$

4. Soit $f \in \Sigma$. Montrer que, si $x > \alpha(f)$, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(\mathcal{L}(f)(x)).$$

5.

   a. Si $f,\ f' \in \Sigma$, montrer alors que, pour tout $x > \alpha(f), \alpha(f')$ on a

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

   b. Si $f,\ f', ..., f^{(n)} \in \Sigma$, montrer alors que, pour tout $x > \alpha(f), \alpha(f'), ...\alpha(f^{(n)})$ on a

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(x) = x^n\mathcal{L}(f)(x) - x^{n-1}f(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

6. Résoudre léquation et le système différentielle suivante

$$y'' - 3y' + 2y = e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = 2x(t) + 2y(t) + e^t \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = x(t) + 3y(t) - te^t. \end{cases}$$