Exercice 1 : Théorème de Dini

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues du segment $I = [a,b]$ (ou plus généralement d'un compact I de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f continue sur I.

1. Montrer que la suite $(\sup\limits_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel positif α.
2. En utilisant le fait que I est un compact, prouver que $\alpha = 0$.
3. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence uniformément vers f.

Exercice 2 : On définit pour $n \in \mathbb{N}$ une fonction $(f_n)_n$ sur $[0,\pi]$ par

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,\pi], \quad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x(1+nx)} & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la convergence simple et uniforme sur $[0,\pi]$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
2. Soit $a \in]0,\pi[$. Etudier la convergence uniforme sur $[a,\pi]$ de cette suite $(f_n)_n$.

Exercice 3 : Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$ où $f_n(x) = \cos(xe^{-nx^2})$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_n = (\int_0^1 f_n(x)dx)_n$.

Exercice 4 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction u_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum u_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On note $S(x)$ la somme de la série de fonctions $\sum u_n(x)$.
2. Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que la somme $S(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $S(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{n+x-1}dt$. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ S(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.
6. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 5 : On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. On cherche tout d'abord à étudier la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+$ en fonction de α.

(a) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ en distinguant les trois cas : $\alpha > 2,\ \alpha = 2,\ \alpha < 2$.

(b) Dans le cas $\alpha = 2$, la suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?.

(c) Dans le cas $\alpha < 2$, déterminer les valeurs de α pour lesquelles la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

2. Dans le cas $\alpha < 2$, on cherche à étudier la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ en fonction de α.

   (a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) On note $S(x)$ la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$. Pour les valeurs de α déterminées à la question précédente, montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ par : $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$. On note $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ la somme de cette série de fonctions.

2. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

3. (a) Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u'_n(x)$.

   (b) Soit $a > 0$, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u'_n(x)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

   (c) Montrer que S est de calsse C^1 sur $]0, +\infty[$.

4. (a) On note $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $T(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

   (b) Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a $S(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} T(t)dt$, puis calculer $S(x)$.

5. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 7 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ par : $u_n(x) = xe^{-n^2x^2}$.

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etudier la convergence simple de la série $\sum u_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$. On note $S(x)$ la somme de la série de fonctions $\sum u_n(x)$.
3. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ et $K_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K_n(\frac{1}{n}) \geq e^{-4}$ et $\displaystyle\sup_{x\in[0,+\infty[} |R_n(x)| \geq \sup_{x\in[0,+\infty[} |K_n(x)|$.
   (b) En déduire que la série de fonctions $\sum u_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$.

Exercice 8 :

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum u_n(x)$ où $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la somme de cette série de fonctions.
2. La série $\sum u_n(x)$ converge-t-elle normalement sur $]0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
4. En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.
6. Etudier la convergence simple de la série $\sum v_n(x)$ où $v_n(x) = e^x u_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[1, +\infty[$.
7. En déduire $S(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$.

Exercice 9 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction u_n sur $\mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

On note S la somme de la série de fonctions $\sum u_n(x)$ lorsqu'elle existe.

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la série $\sum u_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La série $\sum u'_n(x)$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^*$?
4. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 10 :

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle suivante

$$f(x) - f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

4. En déduire que f' est prolongeable par continuité en 0.