TD N°2
Suites réelles

Exercice 1

1. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Soit M (resp. m) un majorant (resp. minorant) de A.

   a. Montrer que $M = \sup(A)$ si et seulement si il existe une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans A de limite M.

   b. Montrer que $m = \inf(A)$ si et seulement si il existe une suite $(v_n)_n$ à valeurs dans A de limite m.

2. Soit B une partie de $\mathbb{R}$ définie par : $B = \{x \in \mathbb{Q} \; : \; x^2 < 2\}$.

   a. Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = \dfrac{E(10^n\sqrt{2})}{10^n}$, converge vers $\sqrt{2}$.

   b. Déduire que B admet une borne supérieure et la calculer. Est-ce que $\max(B)$ existe?

   c. Montrer que B admet une borne inférieure et la calculer.

Exercice 2 (Limite inférieure et limite supérieure d'une suite réelle)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{u_m, \; m \geq n\}$.

1. Vérifier que $A_{n+1} \subseteq A_n, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \inf(A_n)$ et $W_n = \sup(A_n)$. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elles sont convergentes. On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. Calculer $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ pour les suites $(u_n)_n = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_n = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3

Soit f une application croissante de l'intervalle $[0,1]$ dans lui même, et soit

$$A = \{x \in [0,1] \mid \forall t \in [0,x] : \; t < f(t)\}.$$

Le but de ce problème est de démontrer que f possède un point fixe, i.e. $\exists a \in [0,1] \; : \; f(a) = a$.

1. Montrer que si $f(0) \neq 0$ alors A admet une borne supérieure. On pose $a = \sup A$.

2. Justifier que $a \in [0,1]$.

3. Montrer que $a = \sup(A)$ implique qu'il existe une suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A de limite a et $\forall n \in \mathbb{N}, \; x_n \leq a$.

4. Montrer que $f(a) \geq a$.

5. Si $a = 1$, conclure.
   Dans la suite, on suppose que $0 < a < 1$. On veut démontrer que $f(a) \leq a$.
6. On suppose qu'il existe $t_1 \in [0, a[\ :\ t_1 \geq f(t_1)$, montrer que : $\forall x \in A,\ x \leq t_1$.
7. En déduire que $\forall t \in [0, a[$ on a $t < f(t)$.
8. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*\ :\ a + \frac{1}{N} < 1$ et montrer ensuite que la propriété suivante est fausse
   $$(\mathcal{P}) \quad \exists n \geq N : \forall t \in [a, a + \frac{1}{n}],\ t < f(t).$$
   Indication : montrer que si $(\mathcal{P})$ est vraie entraine que $a + \frac{1}{n} \in A$.
9. Montrer que $\forall n \geq N$, il existe une suite $(t_n)_n$ telle que $t_n \in [a, a + \frac{1}{n}]\ :\ t_n \geq f(t_n)$.
10. Montrer que $\forall n \geq N,\ f(t_n) \geq f(a)$.
11. En déduire que $a \geq f(a)$ et conclure.

Exercice 4

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ \text{et}\ \ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2},\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a, $0 < u_n \leq b$ et $0 < v_n \leq b$.
2. Etablir une relation simple entre $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $u_n - v_n$, et en déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel l. En déduire que la (v_n) converge aussi vers l.
4. Montrer que la suite $(u_n + 2v_n)_n$ est constante et en déduire la valeur de l.

Exercice 5 (Approximation décimale des nombres réels)

Soient x un nombre réel et $(u_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers x.
2. Etablir que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ \ 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n) > -1$. En déduire que $10^{n+1}(u_{n+1} - u_n) \geq 0$.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ \ 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n) \leq 9$.
   On pose $a_0 = u_0 = E(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+1} = 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n)$.
4. Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_{n+1} \leq 9$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_{n+1}}{10^{n+1}}$.
5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$.

6. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{10^n}$. Montrer que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes qui convergent vers x avec $u_n \leq x \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   u_n est appelée l'approximation décimale par défaut à 10^n près de x et v_n l'approximation décimale par excès à 10^n près.

Exercice 6

On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Prouver que la $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$. En déduire que
   $$2(\sqrt{n} - 1) \leq u_n \leq 2\sqrt{n}.$$
3. Montrer que les suites $(v_n) = (u_n - 2\sqrt{n})$ et $(w_n) = (u_n - 2\sqrt{n+1})$ sont adjacentes.
4. Déduire les limites des suites de termes généraux :
   $$a_n = \frac{u_n}{n},\ b_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 7 : (e est un irrationnel)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$.

1. Démontrer que cette suite est croissante.
2. Soit $(v_n)_n$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
3. Démontrer que, pour tout couple (p, q) d'éléments de $\mathbb{N}^*$, on a : $u_p \leq v_q$. Déduire que chacune des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ est convergente.
4. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, et monter que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n < \ell < v_n$.
5. On admet que $\ell = e$ et on propose de monter que e est un irrationnel.
   i. Supposer que e est un rationnel c-à-d $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et montrer que l'on a $u_p q! < p(q-1)! < u_q.q! + 1$.
   ii. Dire si cette inégalité est-elle possible? Conclure.