Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.
2. On pose $U = 2X$ et $V = X-Y$. Déterminer la densité du couple (U,V) puis les densités de U et V.

Exercice 2 Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi de densité

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{3}{4}\exp(-|x+2y| - |x-y|).$$

Calculer la densité de la loi de $(X+2Y, X-Y)$ puis les densités des lois de X et Y.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi de densité

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Montrer $\frac{1}{X}$ est de même loi que X.

Exercice 4 Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire $Y = \max\limits_{1\le i\le n} X_i$.
2. Calculer la loi de la variable aléatoire $Z = \min\limits_{1\le i\le n} X_i$.

Exercice 5 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ $p.s.$ Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

Exercice 6 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère la variable aléatoire réelle positive X de fonction de répartition F_X.

1. Montrer que la fonction $\begin{array}{rl} f: & \Omega\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\omega\ ,\ t) \mapsto f(\omega,t) = 1_{\{X(\omega)>t\}}(\omega,t) \end{array}$ est mésurable.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_0^{+\infty} nt^{n-1}\mathbb{P}[X>t]dt = \int_0^{+\infty} nt^{n-1}(1-F_X(t))dt.$$

Exercice 7 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. On rappelle que, $\mathbb{P}[X=k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_{X_1} de X_1.
2. En déduire la loi de la somme $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Exercice 8 On considère la fonction Gamma définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

On appelle loi $\gamma(a,\beta)$ de paramètres a et β ($a > 0$ et $\beta > 0$) la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f_{a,\beta}(x) = \frac{\beta^a}{\Gamma(a)} e^{-\beta x} x^{a-1} 1_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\gamma(a,\beta)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\beta)$, $\beta > 0$. Montrer par récurrence que la loi de la somme $X_1 + X_2 + ... + X_n$ est la loi $\gamma(n,\beta)$.
3. Soit X et Y deux v.a. réelles indépendantes de loi $\gamma(a,\beta)$ et $\gamma(b,\beta)$ respectivement.
   a. On pose $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. Montrer que $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$.
   b. En déduire que : $\forall u > 0,\ \int_0^u x^{a-1}(u-x)^{b-1}dx = u^{a+b-1}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
   c. Déterminer la loi de $X+Y$.
4. Soit X et Y deux v.a. réelles indépendantes de loi $\gamma(a,\beta)$.
   a. Déterminer la loi de βX et vérifier que la v.a. $\frac{X}{X+Y}$ est bien définie.
   b. Montrer que $X+Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont des v.a. indépendantes.
5. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
   a. Montrer que Y_1^2 suit la loi gamma $\gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
   b. Montrer que $Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_n^2$ suit une loi $\gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$.
   La loi $\gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ est également appelée loi Khi-deux à n degrés de liberté et notée $\chi^2(n)$.

Exercice 9 X une variable aléatoire dans $\mathbb{R}$ est dite symétrique si $-X$ a même loi que X.

1. Si X a une densité f, montrer que : X est symétrique si et seulement si $f(x) = f(-x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de loi symétrique.
3. Montrer que X est symétrique si et seulement si le nombre $E(e^{iuX})$ est réel pour tout $u \in \mathbb{R}$.
4. Si Y et Z sont deux variables aléatoires réelles de même loi et indépendantes, montrer que $Y - Z$ est symétrique.