UNIVERSITE CADI AYYAD — Année universitaire: 2006-2007

Faculté Poly-disciplinaire Safi — Analyse II : TD N° 2 (SMA/SMI)

Exercice 1

Déterminer la nature et la valeur des intégrales généralisées suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t^2}\, dt \qquad\qquad 2. \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mid 1-t^2 \mid}}\, dt$$

Exercice 2

Démontrer le théorème suivant :

Théorème : *Soient f et g deux applications définies sur $[a,b[$, à valeurs positives, localement intégrables sur $[a,b[$, telles que la fonction $\frac{f}{g}$ admette le réel l pour limite à gauche en b.*
1) Si $l \neq 0$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
2) Si $l = 0$ (autrement dit si $f = o_b(g)$) alors la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ implique la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.

Application : Déterminer les valeurs des réels α et β pour lesquelles les intégrales généralisées

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\ln(1+t)}{t^{\beta}}\, dt \qquad\qquad 2. \int_a^{+\infty} \frac{dx}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\, dt \qquad \text{avec} \qquad a > 1,$$

convergent.

Exercice 3

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt \qquad\qquad 2. \int_0^{+\infty} \cos t \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt.$$

Exercice 4

Le but de cet exercice est de montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. Montrer que I est une intégrale généralisée convergente.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}] \quad e^{-t^2} \geq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n.$$

3. En considérant le changement de variable $t = \sqrt{n} \sin x$ montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} I_{2n+1}.$$

4. En considérant le changement de variable $t = \sqrt{n} \tan x$ montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} I_{2n-2}.$$

5. En déduire que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 5

Soit $a > 0$. On définit sur $[a, +\infty[$ les fonctions f et g par

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$.
2. Etablir que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est semi-convergente.
3. Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f(x) - g(x))dx$ n'est pas convergente.
4. En déduire $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ n'est pas convergente. Conclure.

Exercice 6

Déterminer suivant les valeurs du paramètre α la nature de l'intégrale généralisée

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt.$$

2- Déterminer la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{2t+1}{\sqrt{(t-1)(t^4+1)}} dt.$$

Exercice 7

Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.

1- Montrer que I est une intégrale généralisée convergente.

2- Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin t| \geq \sin^2 t$. En déduire que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt,$$

est divergente. Conclure.