UNIVERSITE CADI AYYAD — Année universitaire: 2006-2007

Faculté Poly-disciplinaire Safi — Analyse I : TD N° 1 (SMA/SMI)

Exercice 1

1) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. minorée). Soit M un majorant (resp. minorant) de A. Montrer que $M = \sup(A)$ (resp. $M = \inf(A)$) si et seulement si il existe une suite u à valeurs dans A de limite M.
2) Dans les cas suivants, préciser si la partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément et les déterminer s'il y a lieu:

a. $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$

b. $A = \{u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

c. $A = \{u_n = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

d. $A = \{u_n = 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 2

Pour $a > 0$, on se donne la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}). \end{cases}$$

1. Montrer que $u_0 = \sqrt{a}$ si et seulement si la suite (u_n) est constante.
2. Montrer que si $u_0 \neq \sqrt{a}$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de $n = 1$ et minorée.
3. Montrer que la suite u converge vers une limite $l = \sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$, donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ et pour $n \geq 1$, montrer que

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$

6. **Application** : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice 3

On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Prouver que la $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$. En déduire que

$$2(\sqrt{n} - 1) \leq u_n \leq 2\sqrt{n}.$$

3. Montrer que les suites $(v_n) = (u_n - 2\sqrt{n})$ et $(w_n) = (u_n - 2\sqrt{n+1})$ sont adjacentes.
4. Déduire les limites des suites de termes généraux :

$$a_n = \frac{u_n}{n}, \ b_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 4

Soit $u = (u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$u_n = \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + ... + \frac{\sin n}{n^2+n}.$$

1) Montrer que la suite converge et trouver sa limite l.
2) Trouver N, tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $\mid u_n - l \mid \leq 10^{-2}$.

Exercice 5

Soit $u = (u_n)_n$ une suite réelle. Montrer qu'il suffit que les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ des termes de rang pair et de rang impair admettent le même nombre l pour limite, pour que u admette l pour limite.

Exercice 6

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \geq 2$ et pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} = u_n^2 - \frac{2n}{n+1}.$$

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq 4$. En déduire que u n'a pas de limite finie.

2) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} - u_n \geq (u_n+1)(u_n-2)$. Et en déduire que la suite est croissante. La suite u est-elle majorée?

Exercice 7

Soient α un nombre réel et $u = (u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1 = \alpha$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = \frac{2(n^2+n+1) + nu_n}{(n+1)^2}.$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est monontone et bornée et trouver sa limite l.
2) Trouver une relation simple entre $u_{n+1} - l$ et $u_n - l$.
3) Déduire la valeur de u_n en fonction de α et n.

Exercice 8

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2^n}.$$

1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

2) Montrer que la suite u converge et donner sa limite.

3) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $u_n > \dfrac{1}{2^n-1}$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle décroissante?

Exercice 9

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. On définit par récurrence deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ strictement positives en posant: $a_0 = a$ et $b_0 = b$, et si $n \geq 0$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)}.$$

1) Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes et ont la même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).
2) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{8a}(b_n - a_n)^2.$$

3) En déduire que pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq b_n - a_n \leq 8a(\frac{b-a}{8a})^{2^n}.$$

Exercice 10

Soit la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels positifs, définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$

$$u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n^2}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \leq 2$.

2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a l'encadrement

$$\frac{1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{(n-1)^2}.$$

En déduire que la suite u a une limite l que l'on calculera.
3) On veut étudier la monotonie de la suite u.

i. Montrer que le suite $v = (v_n)_{n\geq 2}$définie par

$$v_n = \frac{n}{n^2 - 1},$$

est décroissante.

ii. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $u_n \geq v_n$.

iii. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

iv. Est ce que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante?

Exercice 11

Soit la suite $u = (u_n)_{n\geq 5}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + ... + \frac{1}{C_n^{n-1}} + \frac{1}{C_n^n}$$

$$\text{avec} \qquad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad \text{et} \qquad n! = n(n-1)(n-2).....1$$

1) Montrer que

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k} \leq 2\frac{(n-3)}{n(n-1)}$$

2) Déduire que la suite $u = (u_n)_{n\geq 5}$ est convergente et donner sa limite.