UNIVERSITE CADI AYYAD — Année universitaire: 2006-2007

Faculté Poly-disciplinaire Safi — Analyse IV : TD N° 1 (SMA)

Exercice 1

Déterminer l'intérieur, la fermeture et la frontière du sous ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^2$ où

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy \neq 0\}.$$

Exercice 2

On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, et on considère les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \ \text{ et } \ 0 < y\}$$

$$B == \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \ \text{ et } \ y - x \geq 0\}.$$

1. Les ensembles A, B et C sont-ils fermés? ouverts?
2. Déterminer : $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{B}$, $\mathring{B}$, $\overline{C}$ et $\mathring{C}$.

Exercice 3

Soient A et B deux parties d'un espace métrique (E, d).
1. Montrer que $(\forall x \in E, d(x, A) = d(x, B)) \Longrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
2. Montrer que $F = \{x \in E : d(x, A) = d(x, B)\}$ est un fermé de E.
3. Montrer que $V = \{x \in E : d(x, A) < d(x, B)\}$ est un ouvert de E.

Exercice 4

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ muni d'une distance équivalente à la distance euclidienne. Le(s)quel(s) des énoncés suivants sont vrais :
a. $\overline{A} \cap A = A$,
b. $Fr(\overline{A}) = Fr(A)$,
c. Si A est ouvert, alors $Fr(A) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash A$.

Exercice 5

On note l'intérieur d'un ensemble A de $\mathbb{R}^n$ par $int(A)$. Soient A et B deux ensembles de $\mathbb{R}^n$. Démontrer les énoncés suivants :
a. $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$, l'inclusion est-elle stricte?
b. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
c. $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B) \subseteq Fr(A \cup B) \cup A \cup B$.

Exercice 6

On définit

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \, y \geq 0, \, x + y \leq 1\}.$$

Pour tout $(x, y) \in T$, on pose
$$f(x, y) = xy(1 - x - y).$$
a. Vérifier que T est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
b. Justifier qu'il existe $(x_0, y_0) \in T$ tel que
$$f(x_0, y_0) = \max_{(x,y)\in T} f(x, y), \text{ et } (x_0, y_0) \in int(T).$$

Exercice 7

Soient d_1 et d_2 deux distances sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement.
1. Montrer que $d : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par
$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2),$$
est une distance sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Pour le reste de ce problème, nous allons utiliser cette métrique sur $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$.
2. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continue, montrer que la fonction
$$F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p,$$
définie par $F(x) = (x, f(x))$ est continue.
3. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est connexe et fermé, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continue, montrer que le graphe de f qui définie par
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \ : \ x \in A\},$$
est connexe et fermé.

Exercice 8

On dit qu'une fonction f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne sur $[0, 1]$ s'il existe un réel $C \geq 0$ (qui dépend de la fonction f) tel que, pour chaque $x, y \in [0, 1]$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$
On note Λ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$.
1. Vérifier que Λ est un sous-espace vectoriel de l'espace $C([0, 1])$ des fonctions réelles continues définies sur $[0, 1]$.
2. Montrer que toute fonction lipschitzienne sur $[0, 1]$ est uniformément continue.
3. Montrer que toute fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ est lipschitzienne sur $[0, 1]$.
4. La fonction qui, à chaque réel $x \in [0, 1]$ associe $\sqrt{x}$ est-elle lipschitzienne sur $[0, 1]$?

Pour $f \in \Lambda$ on note
$$k(f) = \inf\{C \geq 0;\ \forall x, y \in [0, 1],\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|\}$$
5. Montrer que, pour $f \in \Lambda, x, y \in [0, 1]$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leq k(f)|x - y|.$$
6. Montrer que, pour $f, g \in \Lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$k(f + g) \leq k(f) + k(g) \quad \text{et} \quad k(\lambda f) = |\lambda| k(f).$$
7. Est-ce que la fonction k est une norme sur Λ?

On note, pour $f \in C([0, 1])$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On rappelle que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $C([0, 1])$.
8. Montrer que l'application qui, à chaque $f \in \Lambda$, associe $\|f\|_\Lambda = |f(0)| + k(f)$ est une norme qui vérifie $\|f\|_\infty \leq \|f\|_\Lambda$.

Pour chaque entier $n \geq 1$ on note f_n la fonction réelle définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

9. Vérifier que $f_n \in \Lambda$ et calculer $\|f_n\|_\Lambda$. Les deux normes $\|.\|_\Lambda$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur Λ?

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont deux normes sur E. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux constantes A et B strictement positives tels que l'on ait $\forall x \in \mathbb{R}$

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1.$$

1. Montrer que les trois normes sur $\mathbb{R}^n$ définies par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |, \qquad \|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} | x_i |,$$

sont équivalentes. Plus précisement, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} &i) \ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \\ &ii) \ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ &iii) \ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2. \end{aligned}$$

2. Supposons que $n = 2$, représenter dans un repère orthonormé les boules unités, lorsque munit l'espace $\mathbb{R}^2$ des distances associées aux 3 normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.
3. Notons par $\overline{B}_1(0,r)$, $\overline{B}_2(0,r)$, $\overline{B}_\infty(0,r)$ respectivement la boule fermé de centre 0 et de rayon r de $\mathbb{R}^2$ lorsque le munit des distances associées aux 3 normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ respectivement. Montrer les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} &i)\overline{B}_1(0,1) \subset \overline{B}_\infty(0,1) \subset \overline{B}_1(0,2) \\ &ii)\overline{B}_2(0,1) \subset \overline{B}_\infty(0,1) \subset \overline{B}_2(0,\sqrt{2}) \\ &iii)\overline{B}_1(0,1) \subset \overline{B}_2(0,1) \subset \overline{B}_1(0,\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Faire un dessin.

Exercice 10

Soient d une distance sur $\mathbb{R}^p$ équivalente à la distance euclidienne et $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application pour laquelle il existe $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$, tel que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p.$$

Une telle application est appelée contractante et k appelée une constante de contraction. Notre but est de démontrer que f possède un unique point fixe a *i.e.* $\exists! a \in \mathbb{R}^p : f(a) = a$.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^p$.

2. Montrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(a) = a$, alors a est unique.

3. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fixant $x_0 \in \mathbb{R}^p$ et en posant $x_{n+1} = f(x_n)$ ($i.e$ $x_{n+1} = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{(n+1)\ fois}(x_0) := f^{n+1}(x_0)$).

a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

b. En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{(1-k^m)}{1-k} k^n d(x_1, x_0)$$

c. Déduire que $d(x_{n+m}, x_n) \longrightarrow 0$ quand $m, n \to +\infty$ et par suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$.

d. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point a et que $f(a) = a$.

Application :
Pour $p = 1$, Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}.x$ admet 0 comme unique point fixe.

Exercice 11

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^p$ et une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < \frac{1}{2}$, tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^p$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|. \tag{0.1}$$

Le but de cet exercice est de démontrer que f possède un unique point fixe $a \in \mathbb{R}^p$, ce qui signifie qu'il existe un unique point $a \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(a) = a$.

1. Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -\frac{1}{k} \\ 0 & \text{si} \quad x \geq -\frac{1}{k}. \end{cases}$$

satsifait l'inégalité (0.1).

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Montrer que $a = b$.

On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^p$ de la manière suivante : $x_0 \in \mathbb{R}^p$ est quelconque et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$

a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{k}{1-k} \|x_n - x_{n-1}\|$$

b. En déduire que, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^n \|x_1 - x_0\|.$$

c. En utilisant la question *b.*, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \frac{1-k}{1-2k} \left(\frac{k}{1-k}\right)^n \|x_1 - x_0\|.$$

d. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}^p$. On notera a sa limite.

e. Vérifier $f(a) = a$. Pour cela, on utilisera l'inégalité (0.1) avec $x = x_k$ et $y = a$.

f. Conclure.