Exercice 1 : Soient les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt.$$

1. Montrer que F et G sont continues définies sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x > 0$. Montrer que $F'(x) + G'(x) = 0$ et en déduire que $F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\mid G(x) \mid \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 2 : Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.

1. Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F satisfait l'équation différentielle $2F'(x) + xF(x) = 0$ et en déduire la valeur de F.

Exercice 3 : On considère la fonction réelle de la variable réelle : $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^{x-1} \ln(t)} dt$.

On pose $f(x,t) = \dfrac{t-1}{t^{x-1} \ln(t)}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times]1, +\infty[$.

1. Trouver un équivalent de f au voisinage de 1 et au voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que le domaine de définition de F est $D =]3, +\infty[$.
3. Soit $a > 3$. Démontrer que F est continue sur $[a, +\infty[$. En déduire que F est continue sur D.
4. Démontrer que F est de C^1 sur D.
5. Pour $x \in D$, donner l'expression de F'. Déduire que pour tout $x \in D$

$$F(x) = \ln(x-2) - \ln(x-3) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 : On considère la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout entier n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3. Montrer que pour tout réel t strictement positif fixé, l'application $g_t : x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow t^{x-1}$ est convexe. En déduire que l'application Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

5. Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 : On considère la fonction réelle de la variable réelle $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition D de F.
   (b) Démontrer que F est continue sur D.
   (c) Démontrer que F est de C^1 sur D.

2. Pour $x \in D$, On pose $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}} dt$.
   (a) Montrer que J est dérivable sur D. Calculer J'.
   (b) Pour $x \in D$, déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} 2\sqrt{t} e^{-t} e^{ixt}$.
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in D$
   $$J(x) = -2(x+i)J'(x).$$
   (d) En déduire que pour tout $x \in D$
   $$J(x) = \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{i}{2}\arctan(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
   (e) Déterminer la valeur de C.

3. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in D$.

Exercice : On définit, pour $x \geq 0$, la fonctione $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

1. (a) Démontrer que F est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Démontrer que F est de C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) On pose $k = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Montrer que F vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :
   $$(E) \qquad F'(x) - F(x) = \frac{-k}{\sqrt{x}}.$$

2. Pour $x \geq 0$, on pose $G(x) = k e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.
   (a) Montrer que G vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire que F et G sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$ et retrouver la valeur de k.