

Exercice 1 : Calculer la somme des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 a) u_n &= \ln \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right] \quad (n \geq 1) & b) u_n &= \frac{1}{(\ln(n))^n} \quad (n \geq 2) & c) u_n &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad (n \geq 1) \\
 d) u_n &= \frac{n^3}{n!} \quad (n \geq 1) & e) u_n &= \frac{3^n}{7^{n-2}} \quad (n \geq 2) & f) u_n &= \frac{1}{\ln(n^2 + n + 1)} \quad (n \geq 0).
 \end{aligned}$$

Exercice 2 : Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné par :

$$\begin{aligned}
 a) u_n &= \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 2n + 2} \quad (n \geq 0) & b) u_n &= \frac{2n^2 + 1}{n^3 + 2} \quad (n \geq 0) & c) u_n &= \frac{\sin n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (n \geq 1) \\
 d) u_n &= e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}}, \quad (a > 0) & e) u_n &= \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n} \quad (n \geq 0) & f) u_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^n \quad (n \geq 1).
 \end{aligned}$$

Exercice 3 : Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous:

$$\begin{aligned}
 a) u_n &= \frac{n!}{a^n} \quad (a > 0) & b) u_n &= \frac{n!}{n^n} & c) u_n &= \frac{a^n}{n^a} \quad (a > 0) \\
 d) u_n &= \left(a + \frac{1}{n} \right)^n \quad (a > 0) & e) u_n &= \frac{1}{\ln(n!)} & f) &= (1 - e^{-\frac{1}{n^2}}) \sqrt{\ln n}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle à termes positifs. On pose $v_n = \frac{\sqrt{u_n}}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge.
2. Montrer que la réciproque est fautive.

Exercice 5 : Soit le polynôme de degré k : $P_k(X) = X(X-1)\dots(X-(k-1))$.

1. Calculer $a_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_k(n)}{n!}$ en fonction de $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{n!}$.

Exercice 6 : Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs divergente. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n}$. Le but de cet exercice est de démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente.

1. Conclure dans le cas où la suite $(v_n)_n$ ne tendrait pas vers 0.
2. On suppose que la suite $(v_n)_n$ tend vers 0.
 - (a) Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \ln(1 - v_n)$.
 - (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente.



Exercice 7 : Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{\ln(1 + n^\alpha)}{n^\beta}.$$

Déterminer les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la série numérique de terme général u_n est convergente (on étudiera séparément les cas $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$).

Exercice 8 :

1. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.

(a) Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$

converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(b) Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes positifs divergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$

diverge et $\sum_{k=0}^n u_k \underset{+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

2. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

(a) Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$

converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(b) Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à termes positifs divergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$

diverge et $\sum_{k=0}^n u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k$.

Exercice 9 : On veut démontrer le théorème suivant : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Alors H_n admet le développement asymptotique suivant

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

où γ est une constante strictement positive appelée constante d'Euler.

1. Montrer que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. On pose $u_n = H_n - \ln(n)$.

(a) En trouvant un équivalent de $u_n - u_{n-1}$, montrer que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ est convergente.



(b) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente vers un réel qu'on note γ et que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

3. On pose $w_n = u_n - \gamma$.

(a) En trouvant un équivalent de $w_n - w_{n-1}$, montrer que la série de terme général $w_n - w_{n-1}$ est convergente.

(b) En déduire que : $w_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$.

(c) Pour $\alpha > 1$, montrer l'encadrement suivant

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(d) En déduire que : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

(e) En déduire que : $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$,

4. On pose $x_n = w_n - \frac{1}{2n}$.

(a) Montrer que $x_n - x_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$. En déduire que $-x_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}$.

(b) En déduire que : $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 10 : Construire deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ l'une convergente, l'autre divergente, telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exercice 11 : Soit $u_n > 0$. On pose $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$ et $w_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.

a) Montrer que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ sont de même nature.

b) Comparer la convergence des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

Exercice 12 : Soit $\alpha \neq 0$. Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Exercice 13 : Soit deux séries positives convergentes de terme général u_n et v_n . Quelle est la nature de la série dont le terme général est donné ci-dessous :

$$a) w_n = \sqrt{u_n v_n} \quad b) w_n = \frac{\sqrt{u_n}}{n} \quad c) w_n = \frac{u_n}{1 - v_n} \quad d) w_n = u_n^2.$$