Exercice 1 : (Rappels sur les limites des suites et fonctions monotones)

1. Montrer qu'une suite réelle $(u_n)_n$ croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang, majorée (resp. minorée) est convergente majorée (resp. minorée) par sa limite.

2. Montrer qu'une suite réelle $(u_n)_n$ croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang, non majorée (resp. non minorée) admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite.

3. Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$. Montrer que les limites de f à droite en a et à gauche en b existent et on a

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\left(f(]a, b[)\right) \quad \text{et} \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup\left(f(]a, b[)\right).$$

Exercice 2 : (e est un irrationnel)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite ℓ.

2. Déduire que la série de terme général $w_n = \frac{1}{n!}$ est convergente.

3. On admet que $\ell = e$ et on propose de monter que e est un irrationnel.

   i. Supposer que e est un rationnel c-à-d $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et montrer que l'on a $u_q q! < p(q-1)! < u_q.q! + 1$.

   ii. Dire si cette inégalité est-elle possible? Conclure.

Exercice 3 : Calculer la somme des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous :

$$a) u_n = \ln\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right] \ (n \geq 1) \qquad b) u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \ (n \geq 0) \qquad c) u_n = \frac{n^2}{n!} \ (n \geq 1)$$
$$d) u_n = \frac{n^3}{n!} \ (n \geq 1) \qquad e) u_n = \frac{3^n}{7^{n-2}} \ (n \geq 2) \qquad f) u_n = \ln(1 - \tfrac{1}{n^2}) \ (n \geq 2).$$

Exercice 4 : Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné par :

$$a) u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 2n + 2} \ (n \geq 0) \quad b) u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^3 + 2} \ (n \geq 0) \quad c) u_n = \frac{\sin n}{n^{\frac{3}{2}}} \ (n \geq 1)$$
$$d) u_n = \frac{n}{3^n} \ (n \geq 1) \qquad e) u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n} \ (n \geq 0) \quad f) u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n \ (n \geq 1).$$

Exercice 5 : Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous:

$$a) u_n = \frac{n!}{a^n} \ (a > 0) \qquad b) u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad c) u_n = \frac{a^n}{n^a} \ (a > 0)$$
$$d) u_n = (a + \frac{1}{n})^n \ (a > 0) \quad e) u_n = \frac{1}{\ln(n!)} \qquad f)(1 - e^{\frac{1}{n^2}})\sqrt{\ln n}.$$

Exercice 6 : Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}.$$

Déterminer les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la série numérique de terme général u_n est convergente (on étudiera séparément les cas $\alpha < 0, \alpha = 0$ et $\alpha > 0$).

Exercice 7 : Soit $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ une série à termes positifs convergente.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{=} o(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k)$.
2. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Exercice 8 : On veut démontrer le théorème suivant : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors H_n admet le développement asymptotique suivant

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}),$$

où γ est une constante strictement positive appelée constante d'Euler.

1. Montrer que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln(n)$.
   (a) En trouvant un équivalent de $u_n - u_{n-1}$, montrer que que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ est convergente.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente vers un réel qu'on note γ et que
   $$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$
3. On pose $w_n = u_n - \gamma$.
   (a) En trouvant un équivalent de $w_n - w_{n-1}$, montrer que que la série de terme général $w_n - w_{n-1}$ est convergente.
   (b) En déduire que : $w_n \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$.
   (c) Pour $\alpha > 1$, montrer l'encadrement suivant
   $$\frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

(e) En déduire que : $H_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$,

4. On pose $x_n = w_n - \dfrac{1}{2n}$.

(a) Montrer que $x_n - x_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^3}$. En déduire que $-x_n \underset{+\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}$.

(b) En déduire que : $H_n = \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$.

Exercice 9 : Construire deux séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ l'une convergente, l'autre divergente, telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exercice 10 : Soit $u_n > 0$. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

a) Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ sont de même nature.

b) Comparer la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

Exercice 11 : Soit $\alpha \neq 0$. Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Exercice 12 : Soit deux séries positives convergentes de terme général u_n et v_n. Quelle est la nature de la série dont le terme général est donné ci-dessous :

$$a)w_n = \sqrt{u_n v_n} \qquad b)w_n = \frac{\sqrt{u_n}}{n} \qquad c)w_n = \frac{u_n}{1-v_n} \qquad d)w_n = u_n^2.$$