Exercice 1 : Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)dt$.

1. Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F satisfait l'équation différentielle $2F'(x) + xF(x) = 0$ et en déduire la valeur de F.

Exercice 2 : On considère la fonction réelle de la variable réelle : $x \mapsto F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^{x-1}\ln(t)}dt$.

On pose $f(x,t) = \frac{t-1}{t^{x-1}\ln(t)}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times]1,+\infty[$.

1. Trouver un équivalent de f au voisinage de 1 et au voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que le domaine de définition de F est $D =]3,+\infty[$.
3. Soit $a > 3$. Démontrer que F est continue sur $[a,+\infty[$. En déduire que F est continue sur D.
4. Démontrer que F est de C^1 sur D.
5. Pour $x \in D$, donner l'expression de F'. Déduire que pour tout $x \in D$

$$F(x) = \ln(x-2) - \ln(x-3) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 : On considère la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout entier n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. Montrer que pour tout réel t strictement positif fixé, l'application $g_t : x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow t^{x-1}$ est convexe. En déduire que l'application Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.
5. Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 : On considère la fonction F définie par: $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $[0,+\infty[$.
2. Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$.

3. Montrer que F est de calsse C^2 sur $]0,+\infty[$.

4. Montrer que $\quad F''(x)=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt$, pour tout $x>0$.

5. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt=\frac{x}{x^2+4}$ pour tout $x>0$.

6. Vérifier que $|F'(x)|\leq\dfrac{1}{x}$, pour tout $x>0$. En déduire que $F'(x)=\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}\ln(x^2+4)$, pour tout $x>0$.

7. A l'aide d'une intégration par parties, déduire que $F(x)=\frac{1}{4}x\ln(\frac{x^2}{x^2+4})-\arctan(\frac{x}{2})+\dfrac{\pi}{2}$.

8. En déduire la valeur de $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$.

9. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5 : On considère la fonction réelle de la variable réelle $F:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition D de F.
   (b) Démontrer que F est continue sur D.
   (c) Démontrer que F est de C^1 sur D.

2. Pour $x\in D$, On pose $J(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}}dt$.
   (a) Montrer que J est dérivable sur D. Calculer J'.
   (b) Pour $x\in D$, déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}2\sqrt{t}e^{-t}e^{ixt}$.
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x\in D$
   $$J(x)=-2(x+i)J'(x).$$
   (d) En déduire que pour tout $x\in D$
   $$J(x)=\frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}e^{\frac{i}{2}\arctan(x)},\quad C\in\mathbb{R}.$$
   (e) Déterminer la valeur de C.

3. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x\in D$.