TD N°1
Nombres réels

Exercice 1
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{-a : a \in A\}$.

1. Montrer que
$$\inf(-A) = -\sup(A) \quad \text{et} \quad -\inf(A) = \sup(-A).$$
2. En déduire que toute partie B non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Exercice 2
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ avec B bornée et $A \subseteq B$. Comparer $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$ et $\inf(B)$.

Exercice 3
Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. On pose $A+B = \{a+b : (a,b) \in A \times B\}$ et $A-B = \{a-b : (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que :
   - **a.** $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) \quad$ et $\quad \sup(A-B) = \sup(A) - \inf(B)$.
   - **b.** Etablir des formules semblables pour $\inf(A+B)$ et $\inf(A-B)$.
2. On définit $A.B = \{ab : (a,b) \in A \times B\}$ et $\frac{1}{A} = \{\frac{1}{a} : a \in A\}$. Montrer que si tous les éléments de A et B sont strictement positifs alors on a
   - **a.** $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$,
   - **b.** $\sup(\frac{1}{A}) = \frac{1}{\inf(A)}$, si $\inf(A) > 0$.
3. Montrer que
   - **a.** $A \cup B$ est non vide et bornée
   - **b.** $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\} \quad$ et $\quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.

Exercice 4
1. Montrer que pour tous $h > -1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$
2. En déduire que pour tous $x > 1$ et $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \geq y$.

Exercice 5 (*Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$*)
Soient deux réels distincts quelconque $a < b$. Nous allons montrer d'abord qu'il existe au moins un rationnel r dans l'intervalle $]a,b[$ puisqu'il en existe une infinité.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q tel que $b - a > \dfrac{1}{q}$.
2. En utilisant la définition de la partie entière du réel x montrer la propriéte suivante:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! p \in \mathbb{Z} \ \text{ tel que } \ p < x \leq p + 1.$$

3. Montrer que :

$$\exists! p \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad \frac{p}{q} < b \leq \frac{p+1}{q}.$$

4. Montrer que $a < \dfrac{p}{q}$. En déduire que $a < \dfrac{p}{q} < b$.
5. Enoncer le résultat des questions 1, 2, 3 et 4.

Soit l'ensemble $A = \{r \in \mathbb{Q} : a < r < b\}$. Nous allons montrer que A est infini.
6. Supposer tout d'abord que A est fini, trouver une contradiction.
7. Enoncer le résultat obtenu à la question 6.

Exercice 6

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$, alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire que : entre 2 nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 7

Soit f une application croissante de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui même, et soit

$$A = \{x \in [0, 1] \ : \ x \leq f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne supérieure. On pose $a = \sup A$.
2. Justifier que $a \in [0, 1]$.
3. Montrer que $f(a)$ est un majorant de A. En déduire que $f(a) = a$.

Exercice 8

Dans chacune des cas suivants, préciser si la partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément et les déterminer s'il y a lieu:

a. $A = [-1, 4[$

b. $A = \{a + \dfrac{b}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $a, b > 0$

c. $A = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\alpha, \beta - \frac{1}{n}]$, avec $\alpha < \beta$,

d. $A = \{2 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

e. $A = \{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$

f. $A = \{3 + \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

g. $A = \{a + bn : n \in \mathbb{N}\}$ avec $a, b > 0$

h. $A = \{a + (-1)^n b : n \in \mathbb{N}\}$ avec $a, b > 0$.