Exercice 1 Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces probabilisables et $\mathcal{C}$ une partie de E telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Montrer que X est une varibales aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ si et seulement si $X^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

Exercice 2 Soit $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité sur $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ telle que

$$\mathbb{P}(]a,b]) = b - a, \text{ si } 0 \leq a \leq b \leq 1.$$

Cette mesure est appelé mesure de probabilité uniforme. Montrer que :

1. $\forall x \in [0,1]$, on a $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.
2. $\mathbb{P}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$.
3. $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 0$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble non dénombrable de Cantor.

Exercice 3 Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ un espace mesuré, où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu borélienne et λ est la mesure de Lebesgue. Montrer que :

1. $\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b]) = b - a$, si $a \leq b$.
2. Si $O \neq \emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\lambda(O) > 0$.
3. Si K est un compact de $\mathbb{R}$, alors $\lambda(K) < +\infty$.
4. Donner un exemple d'un ensemble de Borel E non dénombrable mais $\lambda(E) = 0$.

Exercice 4 Si $|X|$ est une variable aléatoire, est-ce que X est nécessairement une variable aléatoire?

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \max(-X, 0)$ sont des variables aléatoires réelles.

Exercice 6 On considère deux variables aléatoires réelles X et Y densités sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indépendantes, X suivant la loi exponentielle de paramètre λ et Y la loi exponentielle de paramètre μ, avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire λX ?
2. Soit $u > 0$. Trouver la densité la variable aléatoire $S = Y - uX$.
3. (a) Montrer que pour tout $u \leq 0$, $\mathbb{P}(R \leq u) = 0$.
   (b) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $R = \dfrac{Y}{X}$.
   (c) Montrer que la variable aléatoire R est une densité et préciser une densité de R
   (d) La variable aléatoire R admet-elle une espérance?
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \dfrac{Y}{X+Y}$ Dans le cas particulier $\lambda = \mu$, reconnaître la loi de U et préciser, s'il y a lieu, son espérance et sa variance.