UNIVERSITE CADI AYYAD — Année universitaire: 2006-2007

Faculté Poly-disciplinaire Safi — Analyse II : TD N° 1 (SMA/SMI)

Exercice 1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de fonctions définies par

$$\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times[0,1],\quad f_n(x)=\frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2.
   (a) Montrer que : $\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times[0,1],\quad |f_n(x)-f(x)|\leq\dfrac{2}{nx+1}$.
   (b) Soit $a\in]0,1]$. Déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.
   (c) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$.

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}f_n(x)dx$.

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de fonctions définie par

$$\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad f_n(x)=\frac{e^{nx}+2}{e^{nx}+1}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer, par deux méthodes, que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit f_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned}f_n(x)&=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}+...+\frac{x^2}{(1+x^2)^n},\ n\in\mathbb{N},\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^2}{(1+x^2)^k}.\end{aligned}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f_n. f_n est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$.
2) Ecrire f_n sous une forme plus simple et en déduire la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément? Comparer $\lim\limits_{x\to0}(\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x))=\lim\limits_{n\to+\infty}(\lim\limits_{x\to0}f_n(x))$.

Exercice 4

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f_n(x)=n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x\in[0,1]$.
1) Trouver la limite simple des fonctions f_n.
2) Etudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^\alpha x(1-x)^n dx$. Y-a-t-il convergence uniforme?

Exercice 5

Déterminer si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses. On donnera une démonstration complète dans le premier cas et un contre-exemple dans le deuxième cas. Les fonctions f_n (non nécessairement continues) sont définies sur un intervalle I.

(a) Si $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur I et si f est bornée sur I, alors chaque f_n est bornée sur I.

(b) Si $f_n \longrightarrow f$, et $g_n \longrightarrow g$ uniformément sur I, alors $f_n + g_n \longrightarrow f + g$ uniformément sur I.

(c) Si $f_n \longrightarrow f$, et $g_n \longrightarrow g$ uniformément sur I, alors $f_n g_n \longrightarrow fg$ uniformément sur I.

(d) Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b[$ et si la suite numérique $(f_n(b))_n$ est convergente, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

(e) Si $f_n \longrightarrow f$ simplement sur I, avec f_n et f continues, alors la convergence est uniforme sur I.

(f) Si f_n et g_n sont continues sur $I = [a,b]$, et si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent uniformément sur I, alors $(f_n g_n)_n$ converge uniformément sur I.

Exercice 6

Montrer que si $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est continue pour tout n, et si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b[$, alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Exercice 7

Soit y_n la solution de l'équation:

$$(En) \qquad (1+\frac{1}{n})y'' - (2+\frac{1}{n})y' + y = 0,$$

vérifiant les conditions initiales: $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. Calculer explicitement y_n.
2. Déterminer la limte simple , y, des fonctions y_n.
3. Vérifier que y est solution de l'équation limite de (En) avec les même conditions initiales.