El Hassan Essaky
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département Maths-Info

Cours d'Analyse 6

SMA Semestre 4
First draft

Chapitre 1

Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans ce chapitre, I et J désignent deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f soit une fonction de deux variables définies sur $I \times J$. Nous allons s'intéresser aux deux points suivants:

1. présenter le passage à la limite, pour une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sous un signe intégral. D'une autre façon, on cherche à donner des conditions suffisantes assurant la relation :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)d.$$
:

2. Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions définies par intégration sur I d'une fonction qui dépend d'un paramètre $x \in J$
$$x \longrightarrow F(x) = \int_I f(t,x)dt.$$

1.1 Passage à la limite sous un signe intégral pour une suite de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions, on cherche à donner des conditions suffisantes assurant la relation :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)d.$$

1.1.1 Cas d'un segment

Soit I un segment de $\mathbb{R}$ de type $[a,b]$. On a le théorème suivant.

Théorème 1.

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$.
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une application f.

Alors la fonction f est continue sur $I = [a,b]$ et on a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

Preuve. On a pour tout x de $[a,b]$
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty,$$
donc en intégrant
$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty$$

et alors
$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty$$
Et comme le membre de droite converge vers 0 par convergence uniforme, il en est de même de celui de gauche. ■

Remarque 1. *Ce résultat devient évidemment faux si on oublie certaines des hypothèses :*

1. *la limite n'est plus continue (perte du sens),*
2. *la convergence n'est plus uniforme (perte de l'interversion et de l'égalité),*
3. *l'intervalle n'est pas un segment...*

1.1.2 Cas d'un intervalle quelconque : Théorème de convergence dominée

L'ensemble des fonctions continues par morceau sera notée par $\mathcal{CM}$. Rappelons qu'une fonction est continue par morceaux sur :

1. un segment $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que sa restriction à tout intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ $(i \in \{0, \cdots, n-1\})$ est continue sur cet intervalle et et admet une limite finie en a_i droite et une limite finie en a_{i+1} à gauche.
2. un intervalle I quelconque si et seulement si elle l'est sur tout segment de cet intervalle.

Le théorème suivant est valable pour tout type d'intervalle, et fait état d'une hypothèse de domination uniforme (i.e. indépendante du paramètre n). Nous énoncerons un théorème plus général, où l'on suppose que la suite de fonctions converge simplement vers f et pas uniformément:

Théorème 2.

(Théorème de convergence dominée) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{CM}$ sur I,
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une application notée f,
3. f est $\mathcal{CM}$ sur I,
4. il existe $\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x) \qquad \text{(hypothèse de domination),}$$
alors
   - les f_n et f sont intégrables sur I (i.e. appartiennent à $L^1(I, \mathbb{K})$),
   - la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ et on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

1.2 Intégrales dépendant d'un paramètre : continuité et dérivabilité

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide. On étudie la fonction F qui dépend d'un paramètre définie par :

$$x \to F(x) = \int_I f(t,x)dt, \quad (t,x) \in I \times J.$$

Plus précisement :

- Sous quelles conditions est-on assuré de la continuité de F sur J?
- Sous quelles hypothèses F est-elle dérivable sur J?
- Etant donné $a \in \bar{J}$, sous quelles conditions F admet-elle une limite en a? Et alors, peut-on passer à la limite sous le signe intégral ?

1.2.1 Continuité

Théorème 3.

Soient I et J intervalles de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide et $f : I \times J \to \mathbb{K}$. On suppose que

1. pour tout $t \in I$, l'application $x \in J \to f(t,x)$ est continue sur J,
2. pour tout $x \in J$, l'application $t \in I \to f(t,x)$ est continuepar morceaux sur I,
3. il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall (t,x) \in I \times J, |f(t,x)| \leq \varphi(t), \quad \text{(Hypothèse de domination).}$$

alors

- pour tout $x \in J$, l'application $t \in I \to f(t,x)$ est intégrable sur I,
- la fonction $x \in J \to f(t,x)$ est définie et continue sur J, i.e. pour tout $x_0 \in J$

$$\lim_{x \to x_0} \int_I f(t,x)dt = \int_I \lim_{x \to x_0} f(t,x)dt = \int_I f(t,x_0)dt.$$

Preuve. Soit $x_0 \in J$. La fonction $t \in I \to f(t,x)$ est continue par morceaux sur I et son module est majoré sur I par la fonction φ qui est continue par morceaux et intégrable sur I. Donc, la fonction $t \in I \to f(t,x)$ est intégrable sur I. On en déduit l'existence de F. La fonction F est donc définie sur J. Soit $x_0 \in J$. Montrons que F est continue en x_0. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de J qui converge vers x_0. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, posons $g_n(t) = f(t,x_n)$.

- chaque fonction $g_n, n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur I,
- puisque pour chaque $t \in I$, la fonction $x \to f(t,x)$ est continue sur J et que x_n tens vers x_0, on en déduit que pour chaque $t \in I$, la suite numérique $(g_n(t))$ converge vers $f(t,x_0)$ ou encore la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction $t \to f(t,x_0)$. De plus, la fonction $t \to f(t,x_0)$ est continue par morceaux sur I.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$,

$$|g_n(t)| = |f(t, x_n)| \leq \varphi(t).$$

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(F(x_n))_= \displaystyle\int_I g_n(t)dt$ converge et a pour limite $\displaystyle\int_I f(t, x_0)dt = F(x_0)$. ■

Remarque 2. *Ce résultat est encore vrai si l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de J,, i.e. pour tout intervalle $[a, b] \subset J$, il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que*

$$\forall (t, x) \in I \times [a, b], |f(t, x)| \leq \varphi(t), \quad \textit{(Hypothèse de domination locale).}$$

Autrement, La continuité étant une propriété locale, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment de J, d'où le corollaire suivant.

Corollaire 4.

Soient I et J intervalles de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide et $f : I \times J \to \mathbb{K}$. On suppose que

1. pour tout $t \in I$, l'application $x \in J \to f(t, x)$ est continue sur J,
2. pour tout $x \in J$, l'application $t \in I \to f(t, x)$ est continue par morceaux sur I,
3. pour tout intervalle $[a, b] \subset J$, il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall (t, x) \in I \times [a, b], |f(t, x)| \leq \varphi(t), \quad \text{(Hypothèse de domination locale).}$$

alors

- pour tout $x \in J$, l'application $t \in I \to f(t, x)$ est intégrable sur I,
- la fonction $x \in J \to F(x)$ est définie et continue sur J, i.e. pour tout $x_0 \in J$

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \int_I f(t, x)dt = \int_I \lim_{x \to x_0} f(t, x)dt = \int_I f(t, x_0)dt = F(x_0).$$

Le théorème 3 se généralise pour un point a adhérent au domaine où a réel ou infini :

Théorème 5.

Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : (t,x) \to f(t,x)$ une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit a, réel ou infini, adhérent à J. On suppose que

- pour chaque x de J, la fonction $t \in I \to f(t,x)$ est continue par morceaux sur I,
- pour chaque t de I, la fonction $x \in J \to f(t,x)$ a une limite $l(t)$ quand x tend vers a et de plus la fonction l est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ, définie, continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour chaque $(t,x) \in I \times J$,

  $$|f(t,x)| \leq \varphi(t),$$

  alors F admet une limite en a et on a

  $$\lim_{x\to a} \int_I f(t,x)dt = \int_I \lim_{x\to a} f(t,x)dt = \int_I l(t)dt.$$

Preuve. . Si a est réel, pour $(t,x) \in I \times (J \cup \{a\})$, posons

$$g(t,x) = \begin{cases} f(t,x) & \text{si } x \in J \\ l(t) & \text{si } x = a \end{cases}$$

La fonction g vérifie les hypothèses du théorème de continuité sur $I \times (J \cup \{a\})$ (les inégalités $|f(t,a)| \leq \varphi(t)$ étant obtenues par passage à la limite quand x tend vers a). Donc la fonction $G : x \to \displaystyle\int_I f(t,x)dt$ est continue sur $J \cup \{a\}$ et en particulier en a. Ceci montre que

$$\lim_{x\to a} \int_I f(t,x)dt = \int_I \lim_{x\to a} f(t,x)dt = \int_I g(t,x)dt = \int_I l(t)dt.$$

Si par exemple $a = +\infty$, on applique le résultat précédent à la fonction $(t,x) \to f(t,\frac{1}{x})$ en 0 à droite. ∎

1.2.2 Dérivabilité

Théorème 6.

Soient I et J intervalles de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide et $f : I \times J \to \mathbb{K}$. On suppose que

1. pour tout $t \in I$, l'application $x \in J \to f(t,x)$ est de classe C^1 sur J,
2. pour tout $x \in J$, l'application $t \in I \to f(t,x)$ est continuepar morceaux sur I,
3. pour tout $x \in J$, l'application $t \in I \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux sur I,
4. il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall (t,x) \in I \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq \varphi(t), \qquad \text{(Hypothèse de domination).}$$

alors

- pour tout $t \in I$, l'application $F : x \in J \to F(x) = \displaystyle\int_I f(t,x)dt$ est de classe C^1 sur J,
- pour tout $x \in J$, l'application $t \in I \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in J$

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_I f(t,x)dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$$

Preuve. Montrons que F est dérivable sur J. Soit $x_0 \in J$ et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $J \backslash \{x_0\}$ qui converge vers x_0. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, posons

$$f_n(t) = \frac{f(t,x_n) - f(t,x_0)}{x_n - x_0}$$

On a

- chaque fonction $f_n, n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur I,
- puisque pour chaque $t \in I$, la fonction $x \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue sur J et que x_n tend vers x_0, on en déduit que pour chaque $t \in I$, la suite numérique $(f_n(t))$ converge vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$ ou encore la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction $t \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$. De plus, la fonction $t \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$ est continue par morceaux sur I,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité des accroissements finis amène : $\forall t \in I$, il existe une constante c compris entre x_n et x_0 telle que

$$\left|\frac{f(t,x_n) - f(t,x_0)}{x_n - x_0}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,c)\right| \leq \varphi(t).$$

Donc par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt.$$

Donc F est dérivable sur J et

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_I f(t,x)dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

■

Remarque 3. *Ce résultat est encore vrai si l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de J,, i.e. pour tout intervalle $[a,b]\subset J$, il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que Pour tout segment $[a,b]\subset J$,*

$$\forall (t,x)\in I\times[a,b],\ |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)|\le\varphi(t),\qquad \textit{(Hypothèse de domination local).}$$

Autrement, le caractère C^1 étant là encore une propriété locale, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans J. On a alors le corollaire suivant.

Corollaire 7.

Soient I et J intervalles de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide et $f : I\times J\to\mathbb{K}$. On suppose que

1. pour tout $t\in I$, l'application $x\in J\to f(t,x)$ est de classe C^1 sur J,
2. pour tout $x\in J$, l'application $t\in I\to f(t,x)$ est continuepar morceaux sur I,
3. pour tout $x\in J$, l'application $t\in I\to\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux sur I,
4. Pour tout segment $[a,b]\subset J$, il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall (t,x)\in I\times[a,b],\ |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)|\le\varphi(t),\qquad \text{(Hypothèse de domination local).}$$

alors

- pour tout $t\in I$, l'application $x\in J\to f(t,x)$ est de classe C^1 sur J,
- pour tout $x\in J$, l'application $t\in I\to\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est intégrable sur I,
- la fonction $x\in J\to F(x)$ est dérivale sur J, i.e. pour tout $x\in J$

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_I f(t,x)dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$$

Chapitre 2

INTEGRALES MULTIPLES

En mathématique, l'intégrale multiple est une forme d'intégrale qui s'applique aux fonctions de plusieurs variables. Les deux principaux outils de calcul sont le changement de variables et le théorème de Fubini. Ce dernier permet de ramener de proche en proche un calcul d'intégrale multiple à des calculs d'intégrales simples. Nous nous contentons de présenter, dans ce chapitre, uniquement les intégrales doubles et triples, l'extension au intégrales multiples est immédiate. Nous commençons tout d'abord par définir les ensemble quarrable et pavables qui sont des ensemble dont on peut calculer l'aire et le volume respectivement. A l'époque de Newton et Wallis, calculer des aires limitées par des courbes simples (d'équation $y = x^a$ par exemple) a été un moteur pour l'avancement des mathématiques et à conduit au calcul intégral. John Wallis (1616-1703) a notamment résolu le problème de la voûte quarrable en 1692 : trouver une fenêtre dans une coupole hémisphérique de sorte que le reste de la coupole soit quarrable, c'est-à-dire que l'on puisse écrire son aire sous la forme a^2, où a est un nombre constructible à la règle et au compas. Dans ce chapitre, nous allons présenter la théorie générale de l'intégrale d'une fonction de 2 (resp. 3) variables sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Nous donnons aussi des méthodes de calcul des intégrales doubles et triples sur des compacts particuliers, ceux dont on peut délimiter leurs frontière par des fonctions continues.

Pour faciliter la première rencontre avec les intégrales doubles et triples, nous allons commencer, tout d'abord par effectuer des révisions sur l'ntégrale de Riemann. On commence par la construction de l'intégrale de Riemann sur un intervalle $[a,b]$.

2.1 Intégrale de Riemann

2.1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 8.

i) On appelle subdivision de l'intervalle $[a,b]$, un ensemble fini de points $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

ii) Le nombre $h = \max\limits_{0 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$ est appelé le pas de la subdivision.

iii) Une subdivision σ_0 est dite plus fine que σ, si l'ensemble σ_0 contient σ. (plus fine = plus de points). Le pas de la subdivision σ_0 est donc plus petit que celui de σ.

Exemple 1. *La famille $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ où $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, ..., n$, définit une subdivision de $[a,b]$ de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$. La famille $\sigma' = \{x'_0, x'_1, ..., x'_{2n}\}$ où $x'_i = a + i\dfrac{b-a}{2n}$, $i = 0, ..., 2n$, de pas $h = \dfrac{b-a}{2n}$ est plus fine que σ.*

Définition 9.

i) Une application $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier si et seulement s'il existe une subdivision $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ et un ensemble de nombres $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ tels que,

$$\forall k \in \{1,...,n\},\ \forall x \in]x_{k-1}, x_k[,\ f(x) = \lambda_k.$$

ii) On dira que la subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est adaptée à la fonction en escalier f si f est constante sur chacun des intervalles $]x_{k-1}, x_k[$. Toute subdivision plus fine que σ est encore adaptée à f.

On notera $\mathbb{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a,b]$.

Définition 10.

Soit f une fonction en escalier définie sur $[a,b]$. Si $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, et si, pour k compris entre 1 et n, on appelle λ_k la valeur prise par la fonction f sur $]x_{k-1}, x_k[$. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - x_{k-1}).$$

On le note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Interprétation graphique. $\lambda_k(x_k - x_{k-1})$ représente l'aire du rectangle de base $(x_k - x_{k-1})$ et de hauteur λ_k. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire algébrique entre la représentation graphique de la fonction en escalier f et l'axe des abscisses.

Proposition 11.

1) Si f est constante sur $[a,b]$ et vaut λ, alors $I(f) = \lambda(b-a)$.
2) Si f est positive, alors $I(f)$ est positive, car tous les termes de la somme sont positifs.
3) Si $a \leq c \leq b$, en introduisant le point c dans la subdivision, on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(Avec la convention $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$).
4) Si f et g sont deux fonctions en escalier définies sur $[a,b]$, et si μ est un nombre réel, alors on a $I(f+g) = I(f) + I(g)$ et $I(\mu f) = \mu I(f)$. L'application I est donc linéaire sur $\mathbb{E}([a,b])$. 5) Si $f \leq g$, alors $I(f) \leq I(g)$, car $I(g) - I(f) = I(g-f) \geq 0$.

2.1.2 Intégrale des fonctions au sens de Riemann

Soit f une fonction bornée, il existe donc un nombre M, tel que, pour tout x de $[a,b]$, on ait $-M \leq f(x) \leq M$. Notons

$$\mathbb{I}_+(f) = \{I(G) | G \in \mathbb{E}([a,b]), G \geq f\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide car il contient $I(M) = M(b-a)$. D'autre part, si G est une fonction en escalier telle que $G \geq f$, on a aussi $G \geq -M$, et donc $I(G) \geq -M(b-a)$. L'ensemble $\mathbb{I}_+(f)$ est donc minoré. Il possède une borne inférieure. On note $I_+(f)$ cette borne inférieure, qui est appelée intégrale supérieure de f. De même, si l'on pose

$$\mathbb{I}_-(f) = \{I(g) | g \in \mathbb{E}([a,b]), g \leq f\}.$$

le même raisonnement montre que cet ensemble n'est pas vide et est majoré (par $M(b-a)$). Sa borne supérieure existe. On note $I_-(f)$ cette borne supérieure, qui est appelée intégrale inférieure de f. Donc

$$I_+(f) = \inf_{\substack{G \in \mathbb{E}([a,b]) \\ G \geq f}} I(G) = \inf(\mathbb{I}_+(f)) \text{ et } I_-(f) = \sup_{\substack{g \in \mathbb{E}([a,b]) \\ g \leq f}} I(g) = \sup(\mathbb{I}_-(f))$$

Remarquons en particulier, que si $g \leq f \leq G$, et si g et G sont en escalier, alors $I(g) \leq I(G)$, donc $I(G)$ majore $\mathbb{I}_-(f)$, et il en résulte que $I_-(f) \leq I(G)$. Mais cela signifie que $I_-(f)$ minore $\mathbb{I}_+(f)$, donc $I_-(f) \leq I_+(f)$. Enfin, si f est une fonction en escalier, $I(f)$ appartient à $\mathbb{I}_-(f)$ et est un majorant de cet ensemble, il appartient aussi à $\mathbb{I}_+(f)$ et est un minorant de cet ensemble, donc $I(f) = I_+(f) = I_-(f)$.

Définition 12.

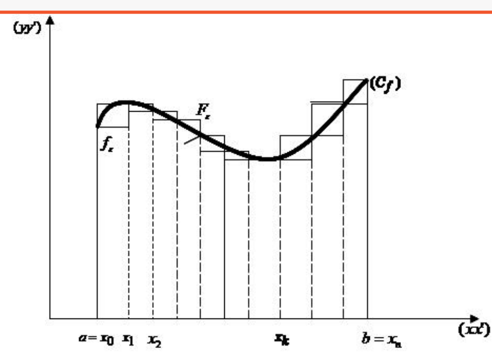
On dira qu'une fonction f est intégrable au sens de Riemann ou Riemann-intégrable, si l'on a $I_+(f) = I_-(f)$. On notera alors $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, la valeur commune.

En particulier, d'après ce qui précède, une fonction en escalier est Riemann-intégrable.

Théorème 13.

Une fonction bornée f est Riemann-intégrable, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver, des fonctions en escalier f_ε et F_ε, telles que

$$f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (F_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x))dx < \varepsilon.$$



Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe F_ε en escalier majorant f telle que

$$I_+(f) \leq I(F_\varepsilon) < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par définition de la borne supérieure, il existe f_ε en escalier minorant f telle que

$$I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2} < I(f_\varepsilon) \leq I_-(f).$$

On en déduit

$$0 \leq I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2} - (I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2}).$$

Donc, si f est Riemann-intégrable,

$$I(F_\varepsilon - f_\varepsilon) = I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Réciproquement, si l'on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ des fonctions en escalier f_ε et F_ε, telles que $f_\varepsilon \leq f \leq F_\varepsilon$ et $\displaystyle\int_a^b (F_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x))dx < \varepsilon$, on a en particulier, quel que soit ε

$$I(f_\varepsilon) \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq I(F_\varepsilon),$$

donc

$$0 \leq I_+(f) - I_-(f) \leq I(F_\varepsilon - f_\varepsilon) < \varepsilon.$$

On en déduit que $I_+(f) - I_-(f) = 0$, donc que f est Riemann-intégrable.

Proposition 14.

Une fonction bornée f est Riemann-intégrable, si et seulement si, on peut trouver, deux suites $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(F_n)_{n\geq 0}$ de fonctions en escalier, telles que, pour tout entier n on ait $f_n \leq f \leq F_n$ et vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (F_n(x) - f_n(x))dx = 0.$$

Dans ce cas

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b F_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Proposition 15.

1) Si f et g sont deux fonctions en escalier définies sur $[a,b]$, et si μ est un nombre réel, alors on a $I(f+g) = I(f)+I(g)$ et $I(\mu f) = \mu I(f)$. L'application I est donc linéaire sur $\mathbb{E}([a,b])$.
2) Si f est Riemann-intégrable et positive, alors $I(f)$ est positive.
3) Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, alors si $f \leq g$, on a $I(f) \leq I(g)$.
4) Si f une fonction définie sur $[a,b]$ Riemann-intégrable, et $a \leq c \leq b$, on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(Avec la convention $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$).

Preuve. 1. Soit f et g intégrables au sens de Riemann. Il existe alors quatre suites de fonctions en escaliers $(f_n),(F_n),(g_n),(F_n)$ telles que, pour tout entier n

$$f_n \leq f \leq F_n \quad \text{et} \quad g_n \leq g \leq G_n,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} I(F_n - f_n) = \lim_{n\to+\infty} I(G_n - g_n) = 0.$$

Alors

$$f_n + g_n \leq f + g \leq F_n + G_n,$$

Les fonctions $f_n + g_n$ et $F_n + G_n$ sont en escalier, et

$$\lim_{n\to+\infty} I((F_n+G_n)-(f_n+g_n)) = \lim_{n\to+\infty} I(F_n - f_n) + \lim_{n\to+\infty} I(G_n - g_n) = 0.$$

Il en résulte que $f+g$ est Riemann-intégrable, et que

$$I(f+g) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n+g_n) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n) + \lim_{n\to+\infty} I(g_n) = I(f)+I(g).$$

2) $I(0) = 0$ appartient alors à $\mathbb{I}\_(f)$, donc $I\_(f) = I(f)$ est positif.
3) On a $g - f \geq 0$, donc $I(g-f) \geq 0$, mais $I(g-f) = I(g) - I(f)$, donc $I(f) \geq I(g)$.

2.1.3 Intégrale d'une fonction continue

Théorème 16.

Toute fonction numérique continue sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Preuve. La fonction f étant continue sur le segment $[a,b]$ elle est bornée et uniformément continue sur cet intervalle. Soit n un entier strictement positif, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - y| \leq \eta$, implique $|f(x)-f(y)| \leq \dfrac{1}{n}$. Choisisons p entier tel que $p > \dfrac{(b-a)}{\eta}$, et posons, si

$0 \leq k \leq p$, $x_k = a + k\dfrac{b-a}{p}$. On obtient ainsi une subdivision $\{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$ de $[a,b]$, telle que $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{p}$. Par ailleurs, sur $[x_{k-1}, x_k]$ la fonction continue f atteint sa borne supérieure en un point ξ_k et sa borne inférieure en un point ν_k. On définit deux fonctions en escalier f_n et F_n en posant, si x appartient à $[x_{k-1}, x_k[$,$F_n(x) = f(\xi_k)$ et $f_n(x) = f(\nu_k)$, et $F_n(b) = f_n(b) = f(b)$. On a alors $f_n \leq f \leq F_n$. Comme ξ_k et ν_k appartiennent à l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, on a $|\xi_k - \nu_k| \leq \dfrac{b-a}{p} \leq \eta$, et donc $0 \leq f(\xi_k) - f(\nu_k) \leq \dfrac{1}{n}$. Alors

$$0 \leq I(F_n - f_n) = \sum_{k=1}^{p} (f(\xi_k) - f(\nu_k))\frac{b-a}{p} \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n}\frac{b-a}{p} \leq \frac{b-a}{n}.$$

Cette suite converge donc vers zéro, et il en résulte que f est Riemann-intégrable.

Proposition 17.

Si f est continue, il en est de même de $|f|$, et $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Preuve. Puisque $-|f| \leq f \leq |f|$, on en déduit $-I(|f|) = I(-|f|) \leq I(f) \leq I(|f|)$, ou encore, puique $I(|f|)$ est positif $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Proposition 18.

(Inégalité de la moyenne)
Si f est continue

$$|I(f)| \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Preuve. Si M désigne un majorant de $|f|$, on a $|f| \leq M$, donc $|I(f)| \leq I(|f|) \leq I(M) = M(b-a)$.

2.1.4 Intégrale indéfinie

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si c appartient à $[a,b]$, on définit une fonction F sur $[a,b]$ en posant

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Cette intégrale est appelée intégrale indéfinie de f. On a alors le théorème fondamental du calcul intégral :

Théorème 19.

Soit f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors la fonction F définie sur $[a,b]$ en posant

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,$$

est dérivable sur $[a,b]$ et, pour tout x_0 de $[a,b]$, on a

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

2.1.5 Primitive d'une fonction continue

Définition 20.

On appelle primitive d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ toute fonction f dérivable dont la dérivée est f, *i.e.* $\forall x \in [a,b], F'(x) = f(x)$.

Proposition 21.

Si F est une primitive de f, alors toute fonction G de la forme $G(x) = F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est encore primitive de f.

Preuve. Sur I, on a $(F-G)' = 0$. Comme $[a,b]$ est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [a,b],\ G(x) = F(x) + C.$$

Notation : Suivant l'usage dû à Leibniz, on note $\int f(x)dx$ l'ensemble des primitives de f. On écrit par exemple

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

D'après le théorème 19, on le résulat suivant

Théorème 22.

i) Toute fonction continue sur $[a,b]$ possède des primitives sur cet intervalle.
ii) Pour toute primitive G de f dans $[a,b]$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

2.1.6 Calcul de primitives

Changement de variable

Théorème 23.

Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $\phi([a,b])$, alors

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Preuve. Soit F une primitive de f sur $\phi([a,b])$. La fonction $f\circ\phi.\phi'$ est la dérivée de $F\circ\phi$ et elle continue sur $[a,b]$ car $f\circ\phi$ et ϕ' le sont. Par conséquent

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = F\circ\phi(b) - F\circ\phi(a) = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Exemple 2. *Calculer l'intégrale* $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\cosh(x)}$.
On a $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, *alors* $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$. *Posons* $t = e^x$, *alors* $dt = e^x dx$ *(ici* $\phi : x \longmapsto e^x$ *qui est bien de classe* C^1 *sur* $[0,1]$*). D'où*

$$J = \int_1^e \frac{2}{t^2+1}dt = [2\arctan t]_1^e = 2\arctan e - \frac{\pi}{2}.$$

Intégration par parties

La règle de dérivation du produit fg conduit à :

Théorème 24.

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Exemple 3. *Calculer* $J = \displaystyle\int_0^x t\sin t dt$. *On a* J *est sous la forme* $\displaystyle\int_0^x f(t)g'(t)dt$, *où* $f(t) = t$ *et* $g'(t) = \sin t$. *Alors,*

$$J = [-t\cos t]_0^x - \int_0^x (-\cos t)dt = -x\cos x + \sin x.$$

Intégration d'une fraction rationnelle

Soit à calculer $J = \displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(s)}$, où $P(x), Q(x)$ sont des fonctions polynômes. On décompose la fraction en éléments simples, c'est à dire qu'elle se présente sous la forme d'éléments de 3 types suivants :
<u>1^{er} type</u> : $a_n x^n, a_n \in \mathbb{R}$ alors

$$\int a_n x^n dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{constante}.$$

<u>$2^{\text{ème}}$ type</u> : $\dfrac{\alpha}{(x-a)^n}, \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.
Si $n > 1$, alors

$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^n}dx = \frac{\alpha}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + \text{constante}.$$

Si $n = 1$,

$$\int \frac{\alpha}{x-a}dx = \alpha \ln|x-a| + \text{constante}.$$

<u>$3^{\text{ème}}$ type</u> : $g(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{(x^2+\gamma x+\delta)^n}, (\gamma,\delta,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4, n \in \mathbb{N}^*$, et $\Delta = \gamma^2 - 4\delta < 0$. On a

$$x^2+\gamma x+\delta = (x+\frac{\gamma}{2})^2+\delta-\frac{\gamma^2}{4} = -(x+\frac{\gamma}{2})^2-\frac{\Delta}{4} = -\frac{\Delta}{4}(1+(\frac{2x+\gamma}{\sqrt{-\Delta}})^2)$$

Le changement de variable $t = \dfrac{2x+\gamma}{\sqrt{-\Delta}}$ conduit au calcul des primitives suivantes :

$$I_n = \int \frac{2t}{(1+t^2)^n}dt \quad \text{et} \quad J_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^n}dt.$$

On obtient alors

$$I_n = \frac{1}{n-1}\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} \quad \text{si} \quad n > 1,$$

et

$$I_n = \ln|1+t^2| \quad \text{si} \quad n = 1.$$

La fonction J_n se calcule par une formule de récurrence obtenue par une intégration par partie. On a alors

$$J_1 = \arctan t \quad \text{et} \quad J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}J_n + \frac{t}{2n(1+t^2)^n} \; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Intégration d'une fraction rationnelle en sinus et cosinus

En général, on fait le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$ et on utilise les relations

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \; \text{ et } \; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

On obtient l'intégrale d'une fraction rationnelle en t qu'on sait déjà calculer.
Dans certains cas particulier, il suffit de faire les changements de variables : $t = \sin x, t = \cos x$ ou $t = \tan x$.

Exemple 4. *Calculer* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x}$. *On pose* $t = \tan x$, $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$, *alors*

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{1+3t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\sqrt{3}dt}{1+(\sqrt{3}t)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

2.2 Intégrale double

2.2.1 Les pavés et leurs mesure

Définition 25.

On appelle pavé de $\mathbb{R}^2$ une partie P égale à un produit d'intervalles compacts

$$P = [a,b]\times[c,d]$$

Le réel positif : $\mu(P) = (b-a)(d-c)$ est appellé la mesure du pavé P .

2.2.2 Ensemble pavable de $\mathbb{R}^2$

Définition 26.

Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite pavable si elle est réunion d'une famille finie de pavés $(P_i)_{i\in I}$ d'intérieurs deux à deux disjoints. (i.e. si $i \neq j$ alors $\overset{\circ}{P_i} \cap \overset{\circ}{P_j} = \emptyset$). Le réel positif :

$$\mu(P) = \sum_{i\in I} \mu(P_i),$$

ne dépend que de la partie A. Il est appelé la mesure (ou l'aire) de la partie pavable A.

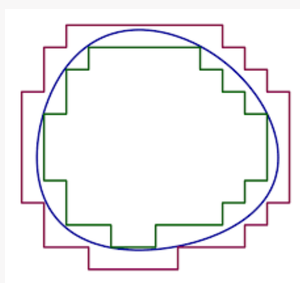
Remarque 4. *Toute réunion ou intersection finie d'ensembles pavables est pavable et si A et B sont pavables:*

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$$

2.2.3 Ensemble quarrable de $\mathbb{R}^2$

Définition 27.

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. On note $m^+(A)$ la borne inférieure des aires des parties pavables contenant A et $m^-(A)$ la borne supérieure des aires des parties pavables contenues dans A. La partie A est quarrable si et seulement si $m^+(A) = m^-(A)$ et la valeur commune de ces deux bornes est appelée aire ou mesure de A et notée $\mu(A)$.



Une partie A (intérieur ici à la courbe bleue) est quarrable si et seulement s'il peut être approximé à la fois par des ensembles pavables intérieurs et extérieurs (leurs frontières figurent respectivement en vert et en rose).

Exemple 5. *Si f est une fonction positive continue sur le segment $[a,b]$ alors la partie:*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

est quarrable et il résulte de la définition de l'intégrale de Riemann que

$$\mu(A) = \int_a^b f(t)dt.$$

2.2.4 Intégrale double d'une fonction bornée

Sommes de Darboux

Définition 28.

Soit f une fonction bornée définie sur la partie quarrable $A \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Etant donnée une subdivision $\delta = (A_i)_{i\in I}$ de A, formée de parties quarrables d'intérieurs disjoints, on appelle sommes de Darboux de la fonction f relative à la subdivision δ, les sommes :

$$s(\delta) = \sum_{i\in I} m_i \mu(A_i), \quad S(\delta) = \sum_{i\in I} M_i \mu(A_i)$$

où les réels m_i et M_j sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de la fonction f sur la partie quarrable A_i .

Définition 29.

La fonction f est intégrable sur A si et seulement si, en notant Δ l'ensemble de toutes les subdivisions en parties quarrables d'intérieurs disjoints de A, on a :

$$\inf_{\delta\in\Delta} S(\delta) = \sup_{\delta\in\Delta} s(\delta)$$

la valeur commune de ces bornes est alors appelée intégrale double de f sur A et

$$\iint_A f(x,y)dxdy$$

On a le théorème suivant.

Théorème 30.

Une fonction continue sur une partie quarrable A compacte y est intégrable.

Sommes de Riemann

Définition 31.

Soit f une fonction bornée définie sur la partie quarrable $A \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Etant donnée une subdivision δ de A en parties quarrables d'intérieurs disjoints, on appelle sommes de Riemann de la fonction f relatives à la subdivision δ, les sommes :

$$\sigma(\delta) = \sum_{i\in I} f(\xi_i)\mu(A_i)$$

où les points ξ_i sont choisis dans la partie A_i.

Les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale. En effet elles sont encadrées par des sommes de Darboux relatives aux mêmes subdivisions. On a donc :

Théorème 32.

Si la fonction bornée f est intégrable sur A les sommes de Riemann $\sigma(\delta)$ convergent vers $\iint_A f(x,y)dxdy$ quand le pas de la subdivision $h = \max_j \mu(A_j)$ tend vers zéro .

Propriétés de L'intégrale double

1. **Linéarité.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur A, alors

$$\iint_A (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))dxdy = \lambda \iint_A f(x,y)dxdy + \mu \iint_A g(x,y)dxdy$$

2. **Croissance.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R, telles que $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in A$, alors

$$\iint_A f(x,y)dxdy \leq \iint_A g(x,y)dxdy$$

On en déduit que

$$\left| \iint_A f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_A \left| f(x,y) \right| dxdy$$

Remarque 5. *L'aire d'une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$ peut être vue comme une intégrale d'une fonction constante égale à 1 sur D :*

$$Aire(D) = \iint_D dxdy$$

Il est facile d'expliquer cela par un raisonnement géométrique - présenter le graphe de la fonction 1 sur D et voir quel volume représente l'intégrale double.

2.3 Intégrale triple

2.3.1 Les pavés et leurs mesure

Définition 33.

On appelle pavé de R^3 une partie P égale à un produit d'intervalles compacts

$$P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$$

Le réel positif : $\mu(P) = (b-a)(d-c)(e-f)$ est appellé la mesure du pavé P .

2.3.2 Ensemble pavable de $\mathbb{R}^3$

Définition 34.

Une partie A de $\mathbb{R}^3$ est dite pavable si elle est réunion d'une famille finie de pavés $(P_i)_{i\in I}$ d'intérieurs deux à deux disjoints. (i.e. si $i \neq j$ alors $\mathring{P_i} \cap \mathring{P_j} = \emptyset$). Le réel positif :

$$\mu(P) = \sum_{i\in I} \mu(P_i),$$

ne dépend que de la partie A. Il est appelé la mesure (ou le volume) de la partie pavable A.

Remarque 6. *Toute réunion ou intersection finie d'ensembles pavables est pavable et si A et B sont pavables:*

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$$

2.3.3 Ensemble cubable de $\mathbb{R}^3$

Définition 35.

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. On note $m^+(A)$ la borne inférieure des volumes des parties pavables contenant A et $m^-(A)$ la borne supérieure des volumes des parties pavables contenues dans A. La partie A est quarrable si et seulement si $m^+(A) = m^-(A)$ et la valeur commune de ces deux bornes est appelée aire ou mesure de A et notée $\mu(A)$.

Exemple 6. *Si f est une fonction positive continue sur la partie quarrable A de R^2 alors la partie:*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq f(x, y)\}$$

est cubable et il résulte de la définition de l'intégrale par les sommes de darboux que le volume de A est donné par:

$$\mu(A) = \iint_A f(x, y)dxdy.$$

Intégrale triple d'une fonction bornée

Sommes de Darboux

Définition 36.

Soit f une fonction bornée définie sur la partie cubable $A \subset \mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Etant donnée une subdivision $\delta = (A_i)_{i\in I}$ de A, formée de parties quarrables d'intérieurs disjoints, on appelle sommes de Darboux de la fonction f relative à la subdivision δ, les sommes :

$$s(\delta) = \sum_{i\in I} m_i \mu(A_i), \quad S(\delta) = \sum_{i\in I} M_i \mu(A_i)$$

où les réels m_i et M_j sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de la fonction f sur la partie quarrable A_i .

Définition 37.

La fonction f est intégrable sur A si et seulement si, en notant Δ l'ensemble de toutes les subdivisions en parties quarrables d'intérieurs disjoints de A, on a :

$$\inf_{\delta\in Delta} S(\delta) = \sup_{\delta\in Delta} s(\delta)$$

la valeur commune de ces bornes est alors appelée intégrale double de f sur A et

$$\iiint_A f(x,y)dxdy$$

On a le théorème suivant.

Théorème 38.

Une fonction continue sur une partie cubable A compacte y est intégrable.

Sommes de Riemann

Définition 39.

Soit f une fonction bornée définie sur la partie cubable $A \subset \mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Etant donnée une subdivision δ de A en parties cubables d'intérieurs disjoints, on appelle sommes de Riemann de la fonction f relatives à la subdivision δ, les sommes :

$$\sigma(\delta) = \sum_{i\in I} f(\xi_i)\mu(A_i)$$

où les points ξ_i sont choisis dans la partie A_i.

Théorème 40.

Si la fonction bornée f est intégrable sur A les sommes de Riemann $\sigma(\delta)$ convergent vers $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$ quand le pas de la subdivision $h = \max_j \mu(A_j)$ tend vers zéro .

Propriétés de L'intégrale trible

1. **Linéarité.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur A, alors

$$\iiint_A (\lambda f(x,y,z) + \mu g(x,y,z))dxdydz = \lambda \iiint_A f(x,y,z)dxdydz + \mu \iiint_A g(x,y,z)dxdydzz$$

2. **Croissance.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R, telles que $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in A$, alors

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint_A g(x,y,z)dxdydz$$

On en déduit que

$$\left|\iiint_A f(x,y,z)dxdydz\right| \leq \iiint_A \left|f(x,y,z)\right| dxdydz$$

2.4 Théorème de Fubuni pour les intégrales doubles et triple

2.4.1 Théorème de Fubuni pour les intégrales doubles

Comment, en pratique, calcule-t-on les intégrales doubles sur une partie quarrable du plan?

Théorème 41.

(Théorème de Fubini pour un rectangle) L'intégrale double d'une fonction réelle continue f sur un rectangle $A = [a,b] \times [c,d]$ est égale à deux intégrales simples successives :

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b (f(x,y)dx)dy = \int_a^b \int_c^d (f(x,y)dy)dx$$

En particulier, si $f(x,y) = g(x)h(y)$

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy$$

Théorème 42.

A. Soient g_1 et g_2 deux fonctions continues sur $[a,b]$ et soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \quad \text{et} \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

Alors

1. la partie D est quarrable,
2. pour tout fonction réelle f intégrable sur D, on a

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

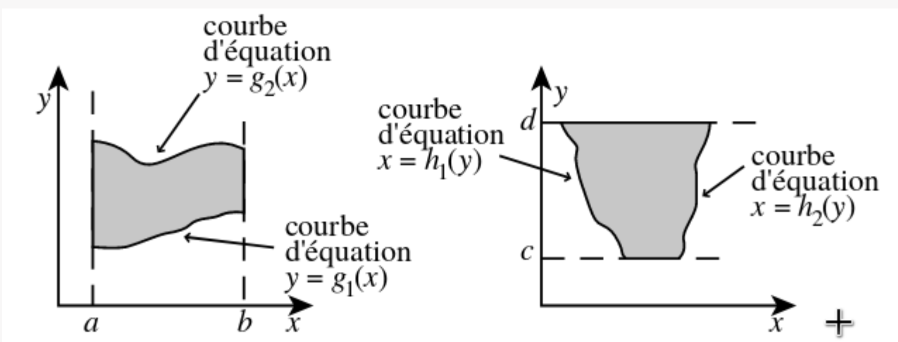
B. Soient h_1 et h_2 deux fonctions continues sur $[c,d]$ et soit

$$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d \quad \text{et} \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$

Alors

1. la partie D' est quarrable,
2. pour tout fonction réelle f intégrable sur D', on a

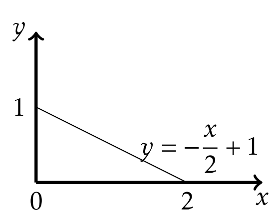
$$\iint_{D'} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$



Exemple 7. *Calculer*

$$I = \iint_D (x+y)^2 dxdy$$

où D est un triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ *et* $(2,0)$.



Alors ici $0 \leq x \leq 2$ *et* y *varie entre 0 et la droite d'équation* $y = -\frac{x}{2} + 1$ *liant les deux points* $(0,1)$ *et* $(2,0)$. *Donc*

$$g_1(x) = 0, \; g_2(x) = -\frac{x}{2} + 1, \; x \in [0,2],$$

et

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \quad et \quad 0 \leq y \leq -\frac{x}{2} + 1\}.$$

Les fonction g_1 *et* g_2 *sont continues et donc* D *est quarrable. Comme la la fonction* f *définie par* $f(x,y) = (x+y)^2$ *est continue sur la partie quarrable compacte (fermée bornée)* D, *la fonction* f *est donc intégrable sur* D. *Par le théorème de Fubuni, on obtient*

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{-x/2+1} (x+y)^2 dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^2 \left[(x+y)^3 \right]_{y=0}^{y=-x/2+1} dx = \frac{7}{6}$$

La variable x *ayant exactement le même statut que la variable* y *donc on peut calculer la même intégrale comme suit:*

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} (x+y)^2 dx \right) dy,$$

et obtenir le même résultat. En fait, on peut aussi écrire D *sous la forme*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \quad et \quad 0 \leq x \leq 2 - 2y\}.$$

Ici $h_1(y) = 0$ *et* $h_2(y) = 2 - 2y$.

Il faut faire attention aux bornes de l'intégrale. La valeur de l'intégrale est un nombre - on ne peut pas avoir des fonctions pour des bornes pour l'intégrale simple calculée en dernier.

2.4.2 Changement de variables dans une intégrale double

Définition 43.

Soient deux ouverts D et Δ de $\mathbb{R}^2$. Un C^1-difféomorphisme $\varphi : D \to \Delta$ est une application bijective de classe C^1 dont l'inverse est aussi de calsse C^1.

Dans le cadre de la théorie de la mesure, le théorème suivant est parfois appelé théorème de transfert.

Théorème 44.

On considère deux ouverts quarrables bornés D et Δ de $\mathbb{R}^2$ et un C^1-difféomorphisme $\varphi : D \to \Delta$ définie par :

$$(u,v) \mapsto \varphi(u,v) = \varphi(u,v) = (x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)),$$

Alors pour toute fonction f continue sur $\overline{\Delta}$

$$\iint_{\overline{\Delta}} f(x,y)dxdy = \iint_{\overline{D}} f(\phi(u,v), \psi(u,v)|det(J_\varphi(u,v))|dudv,$$

où $J_\varphi(u,v)$ la matrice Jacobienne de l'application φ définie par :

$$J_\varphi(u,v)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

et $det(J_\varphi(u,v))$, appelé le jacobien de φ, est le déterminant de la matrice jacobienne.

Remarque 7. *Dans la pratique, en utilisant le théorème d'inversion globale, on montre que si $\varphi : D \to \varphi(D)$ de classe C^1, injective et que son jacobien $det(J_\varphi)$ ne s'annule pas sur D, alors φ est un C^1-difféomorphisme.*

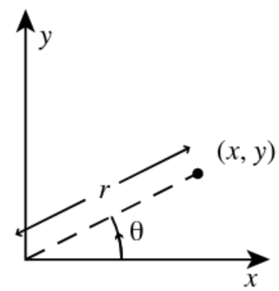
Remarque 8. *En utilisant le calcul des formes différentielles, $dxdy = dx \wedge dy$ s'exprime en fonction de $dudv = du \wedge dv$ par le calcul suivant : si $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$ la 2-forme différentielle (dans le contexte des intégrales on n'écrit pas de symbole de produit $\wedge$) :*

$$\begin{aligned} dxdy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}dudv + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}dvdu = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)dudv = det(J_\varphi(u,v))dudv \end{aligned}$$

Exemple 8. ***Changement en coordonnées polaires.*** *L'exemple suivant est l'un des changements de variables les plus classiques. Il consiste à représenter les points du plan (identifié à $\mathbb{R}^2$ via le choix d'un repère orthonormé) sous forme polaire, selon les formules bien connues suivantes (où (x,y) désigne les coordonnées cartésiennes d'un point et (r,θ) ses coordonnées polaires) :*

Soit $\varphi :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ une bijection entre les coordonées polaires et cartésiennes données définie par

$$(r,\theta) \mapsto \varphi(r,\theta) = (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta).$$



$$det(J_\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \neq 0.$$

Comme on peut le constater, cette fonction φ n'est pas un C^1-difféomorphisme de $[0,+\infty[\times[0,2\pi]$ sur $\mathbb{R}^2$ (elle n'est pas bijective), mais réalise un C^1-difféormorphisme, lorsque restreinte à $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$,sur $\mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_+\times\{0\})$. Vis-à-vis du calcul intégral, la suppression de \\($\mathbb{R}_+\times\{0\}$), appelé coupure, ne change rien (elle est de "mesure nulle").

Calculer $I = \iint_D y^2 dxdy$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$, disque de centre $(0,0)$ de rayon R.
Le calcul direct est assez long :

$$\begin{aligned} I = & \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy\right)dx = \int_{-R}^{R} 2\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy\right)dx \\ = & \int_{-R}^{R} 2\left(y^3/3\right)_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{4}{3}\int_0^R (\sqrt{R^2-x^2})^3 dx \\ = & \frac{4}{3}\int_{\pi/2}^{0} R^3\sin^3\theta(-R\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}R^4\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

où on utilise le changement de variables

$$x = R\cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad dx = -R\sin\theta\ \mathrm{d}\theta,\ R^2 - x^2 = R^2(1-\cos^2\theta) = R^2\sin^2\theta.$$

On utilise aussi la linéarisation de $\sin^4\theta$:

$$\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}}{16} = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}.$$

Ce calcul a l'air assez long et fort utile, mais à l'aide d'un changement de variables sous l'intégrale double on arrive au résultat plus rapidement : les coordonnées polaires transforment le disque en rectangle :

$$\Delta = \{(x,y) \in R^2 \left| x^2+y^2 < R^2 \right.\} \to D = [0,+\infty[\times[0,2\pi].$$

D'où

$$I = \iint_\Delta r^2\sin^2\theta r d\theta dr = \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{R^4}{4}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi R^4}{4}.$$

2.4.3 Théorème de Fubuni pour les intégrales triples.

Il y a plusieurs façons de décrire les points de $\mathbb{R}^3$. Parmi tous ces systèmes de coordonnées, deux apparaissent souvent; il s'agit des coordonnées cylindriques et des coordonnées sphériques. Nous allons maintenant considérer le théorème de changement de coordonnées pour les intégrales triples ainsi que ces systèmes de coordonnées.

Définition 45.

Un compact élémentaire de $\mathbb{R}^3$ est une partie de $\mathbb{R}^3$ de l'une des deux formes $\Delta_{(x,y)}$ ou P définies par:

1. Soit D est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et ϕ_1, ϕ_2 sont des fonctions continues sur D

$$\Delta_{(x,y)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D,\ \phi_1(x,y) \le z \le \phi_2(x,y)\},,$$

2. un pavé de $\mathbb{R}^3$

$$P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f].$$

Théorème 46.

(de Fubini) Soit Δ un compact élémentaire de $\mathbb{R}^3$ et $f(x,y,z)$ une fonction continue sur Δ.

1. Si Δ est de type $\Delta_{(x,y)}$ alors

   (a) $\Delta_{(x,y)}$ est une partie cubable de $\mathbb{R}^3$,

   (b) et
$$\iiint_\Delta f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

   (intégration par "piles")

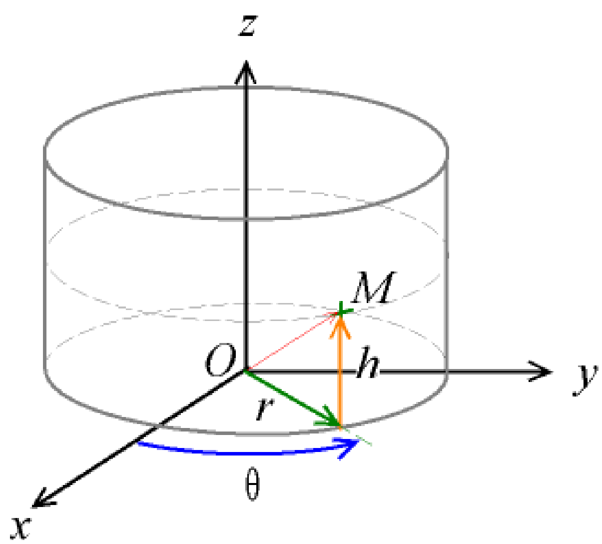
2. Si $\Delta = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ alors

$$\begin{aligned}\iiint_\Delta f(x,y,z)dxdydz = & \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx \\ = & \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz = \cdots \end{aligned}$$

2.4.4 Coordonnées cylindriques–Coordonnées sphériques

Les coordonnées cylindriques sont $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[\times \mathbb{R}$ telles que

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z, \text{ avec } r^2 = x^2 + y^2,\ \ \theta \in [0,2\pi[$$



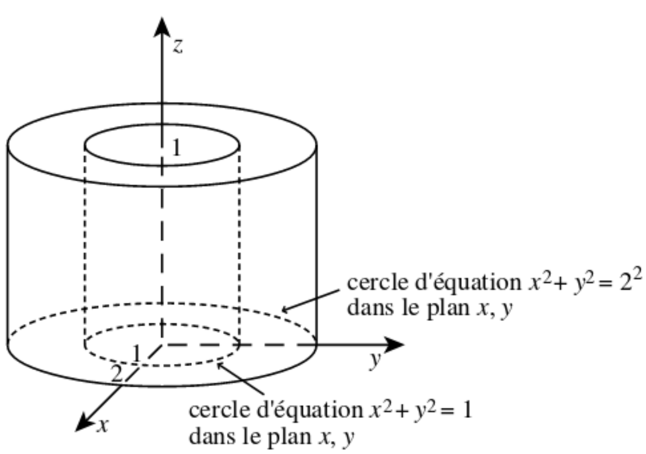
Le jacobien de cette transformation est :

$$det(J_\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

Exemple 9. *Soit* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1\}$. *Calculer l'intégrale triple*

$$\iiint_D ze^{x^2+y^2}\,dxdydz.$$

La région D est celle à l'intérieur du cylindre dont l'axe est l'axe des z et de rayon 2, à l'extérieur du cylindre dont l'axe est aussi l'axe des z et de rayon 1, au-dessus du plan d'équation $z = 0$ *et en-dessous du plan d'équation* $z = 1$.



On pose : $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$, La région D' qui correspondant à D dans les coordonnées cylindriques sera $D' = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1\}$. Donc

$$\begin{aligned}\iiint_D ze^{x^2+y^2}dxdydz. &= \iiint_{D'} ze^{r^2} rdrd\theta dz. = \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 ze^{r^2}rdrd\theta dz\\ &= \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 zdze^{r^2}rdrd\theta dz = \frac{1}{2}\int_1^2 re^{r^2}dr\int_0^{2\pi}d\theta\\ &= \frac{\pi(e^4-e)}{2}.\end{aligned}$$

Exemple 10. *Le volume de la partie Δ du cylindre d'équation $x^2+y^2-ax \le 0$ (où $a>0$) comprise entre le plan xOy et le plan d'équation $z=1$ s'obtient grâce à la formule de changement de variables : Δ est transformée par les coordonnées cylindriques en*

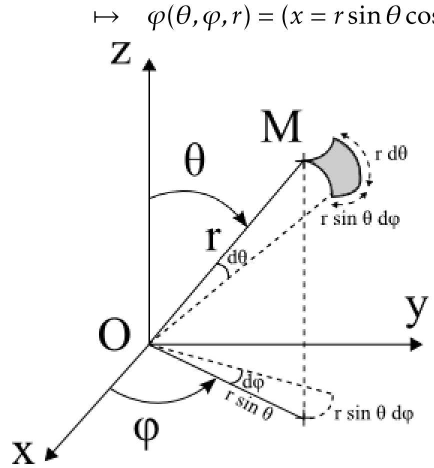
$$\Delta' = \{(r,\theta,z)|\ \theta \in]0,2\pi[,\ r \in]0, a\cos\theta[,\ z \in]0,1[\}$$

Alors,

$$\begin{aligned}V = &\iiint_\Delta dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{a\cos\theta} rdrd\theta\int_0^1 dz = \int_0^{2\pi}\frac{(a\cos\theta)^2}{2}d\theta\\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2\pi}{2}.\end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques sont (θ,ϕ,r) telles que

$$\begin{array}{lll}\Phi :]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^3\\ (r,\theta,\phi) & \mapsto & \varphi(\theta,\varphi,r) = (x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta).\end{array}$$



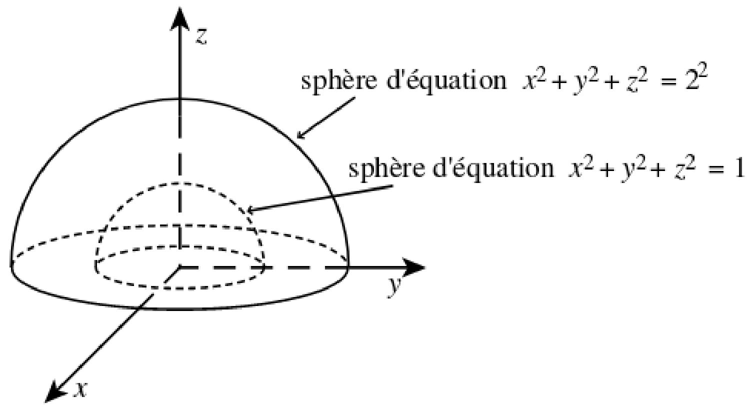
Le jacobien de cette transformation est :

$$det(J_\Phi(r,\theta)) = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\phi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\phi}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \cos\varphi & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix} = -r^2\sin\theta \ne 0.$$

Exemple 11. *Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ 0 \le z\}$. Calculer l'intégrale triple*

$$\iiint_D zdxdydz.$$

La région D est représentée comme suit :



On pose : $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$. *La région* D' *?correspondant à* D *dans les coordonnées sphériques sera* $D' = \{(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \phi \le 2\pi\}$. *Donc*

$$\begin{aligned}
\iiint_D z dxdydz. &= \iiint_{D'} r\cos\theta r^2 \sin\theta drd\theta d\phi. \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\Big[\sin^2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} drd\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3 drd\phi = \frac{15\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Calcul des résidus

L'analyse complexe moderne a été dévelopé au 19 ème siècle par trois mathématiciens célèbres Cauchy, Riemann et Weiestrass. C'est la branche de l'analyse qui étudie les suites, séries et fonctions de variable complexe. Elle permet la généralisation de nombreux concepts de l'analyse réelle aux fonctions de variables complexes. Les fonctions de la variable complexe occupent une large place dans la physique mathématique, par exemple. Elles permettent de résoudre beaucoup de problèmes d'électromagnétisme, de mécanique des fluides, de physique des particules de façon extrêmement rapide et puissante. Leur utilisation n'est toutefois pas la même. Si l'électromagnétisme et la mécanique des fluides se serve de cette appareil mathématique, c'est essentiellement pour modéliser des problèmes à deux dimensions (Les fonctions des variables x et y vont en effet pouvoir se réécrire comme des fonctions de la seule variable complexe $z = x + \mathbf{i}y$.), la physique des particules (et l'utilisation du formalisme pour la physique statistique des solides) l'utilisent pour calculer des intégrales inextricables (C'est le théorême des résidus qui permet cette facilité de calcul.)
Dans ce chapitre, nous présentons les outils principales du calcul des résidus. En analyse complexe, le résidu est un nombre complexe qui décrit le comportement de l'intégrale curviligne d'une fonction holomorphe aux alentours d'une singularité. Les résidus se calculent assez facilement et, une fois connus, permettent de calculer des intégrales curvilignes plus compliquées grâce au théorème des résidus. Le terme résidu vient de Cauchy dans ses exercices de mathématiques publié en 1826.

3.1 Limites et holomorphie

3.1.1 Notions basiques

1. $i^2 = -1$

2. Il existe deux façons de noter la variable complexe :

   (a) $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z|$ et θ est l'argument de z, $\theta \in [-\pi, \pi[$ ou $\theta \in [0, 2\pi[$,..... est la représentation polaire

   (b) $z = x + \mathbf{i}y$, $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$, la représentation cartésienne.

3. On construit une fonction de la variable complexe z à partir d'une fonction de deux variables x et y en utilisant les définitions de z.

$$\begin{aligned} z &= x + \mathbf{i}y \qquad \bar{z} = x - \mathbf{i}y \\ x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad y = \frac{1}{2}(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

4. L'ensemble des complees est noté $\mathbb{C} = \{z = x + iy : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$,

5. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ module de $z \in \mathbb{C}$,

6. inégalités triangulaires: $\forall a, b \in \mathbb{C}$,

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

7. Le disque ouvert (resp. fermé) de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ est noté par $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ (resp. $\overline{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$).

8. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Le segment $[a, b]$, parcouru de a vers b, est l'enveloppe convexe des points a et b, i.e. $[a, b] = \{(1 - t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}$.

9. Un ensemble V de $\mathbb{C}$ est dit un voisinage de z_0 s'il existe $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset V$.

10. Un ensemble U de $\mathbb{C}$ est dit un ouvert si $\forall z \in U\ \exists \varepsilon > 0 : D(z, \varepsilon) \subset U$.

3.1.2 Limites

1. Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de nombres complexes est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$.

2. On dit que (z_n) converge vers z, notation: $z_n \to z$, si $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0 :\ |z_n - z| < \varepsilon$.

3. $z_n \to \infty$ si $\forall M > 0\ \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0 :\ |z_n| \geq M$.

Exemples
a) $i + n \to \infty$;
b) $(-n)^n \to \infty$;
c) $i + 3/n \to i$.
Soient $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$, $z_0 \in U$. Alors

1. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq: $\forall z \in U, 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w| < \varepsilon$.

2. f continue en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, i.e $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq: $\forall z \in U, |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. On note aussi: $f(z) = f(z_0) + o(1)$, $(z \to z_0)$.

3. Soient $f, g : D(z_0, R) \to \mathbb{C}, g(z) \neq 0\ \forall z \neq z_0$. $f = o(g)$, $z \to z_0$, si $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 0$.

   $f = \mathcal{O}(g)$, $z \to z_0$, si $\limsup\limits_{z \to z_0} \dfrac{|f(z)|}{|g(z)|} < \infty$.

4. Donc $f = o(1)$, $z \to z_0$ veut dire que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$.

5. $f = \mathcal{O}(z - z_0) \Longrightarrow f = o(1)$ quand $z \to z_0$ car $|f(z)| = |(z - z_0)(\dfrac{f(z)}{z - z_0})| \leq |z - z_0| \cdot M \to 0$ si $z \to z_0$.

3.1.3 Holomorphie

Malgré la possibilité de considérer un nombre complexe z comme un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mais il y avait une différence essentielle entre la fonction considérée comme une fonction de la variable complexe z ou des variables réelles x et y. Cette différence est particulièrement apparaît dans la dérivation.

Définition 47.

$U \subset \mathbb{C}$ ouvert, $z_0 \in U$. On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 si

$$L := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe dans } \mathbb{C}.$$

On note L par $f'(z_0)$; c'est le dérivée de f en z_0.

On a que f est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \Longleftrightarrow \exists L \in \mathbb{C}$ tq $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + \mathcal{O}(z - z_0)$, car cette dernière équation n'est rien d'autre que $\dfrac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{z - z_0} \to 0$ si $z \to z_0$.

Définition 48.

Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et $z_0 \in U$.

1. On dit que f est holomorphe en z_0, si f est holomorphe dans un voisinage de z_0.
2. On dit que f est holomorphe dans U, on note $f \in H(U)$, si f est $\mathbb{C}$-différentiable en chaque point de U.

Proposition 49.

Soit $f : U \to \mathbb{C}, z_0 \in U$. Alors f $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \Longrightarrow f$ continue en z_0.

Preuve. $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mathcal{O}(z - z_0) \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$ quand $|z - z_0|$ est petit $\Longrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. ■

Exemples

1. La fonction identité, $f(z) = z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, car $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1 \to 1$ si $z \to z_0$. Donc $f'(z) \equiv 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$.
2. Les fonctions constantes $f(z) \equiv c$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ et $f'(z) \equiv 0$.
3. $f(z) = \overline{z}$ n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in \mathbb{C}$.

Car:
$\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \dfrac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = \dfrac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} =: \dfrac{\overline{\omega}}{\omega} =: \dfrac{Re^{-it}}{Re^{it}} = e^{-2it}$.
Notons que $\omega \to 0 \Longleftrightarrow z \to z_0$. Comme e^{-2it} dépend de l'argument de ω, et pas de $|\omega|$, $\lim_{\omega \to 0} \dfrac{\overline{\omega}}{\omega}$ n'existe pas.

Par exemple si on se rapproche de 0 sur la demi-droite $z = r$, $r \to 0^+$, le résultat est 1; si on se rapproche de 0 sur la demi-droite $z = re^{i\pi/4}$, $r \to 0^+$, alors le résultat est $e^{-i\pi/2} = -i \neq 1$.

Lemme 50.

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ continue en $z_0 \in U$. Supposons que $f(z_0) \neq 0$. Alors $\exists \varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tq $\forall z \in D(z_0, \delta)$: $|f(z)| \geq \varepsilon$.

Preuve. Posons $\varepsilon = \dfrac{|f(z_0)|}{2}$. Par continuité, $\exists \delta > 0$ tq

$$\forall z \in D(z_0, \delta) : \ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Donc

$$|f(z)| = |\big(f(z) - f(z_0)\big) + f(z_0)| \geq |f(z_0)| - |f(z) - f(z_0)| \geq$$

$$\geq |f(z_0)| - \frac{|f(z_0)|}{2} = \frac{|f(z_0)|}{2}.$$

■

Proposition 51.

Soient $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f, g \in H(U)$, alors

1. $f + g \in H(U)$ et $(f+g)' = f' + g'$,
2. $f \cdot g \in H(U)$ et $(fg)' = f'g + fg'$,
3. Si $Z(g) = \{z \in U : g(z) = 0\}$ est l'ensemble des racines/zéros de g, alors $\dfrac{f}{g} \in H(U \setminus Z(g))$ et $(\dfrac{f}{g})' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
4. $f : U \to V$ holomorphe, $g : W \to \mathbb{C}$ holomorphe et $V \subset W$, alors $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$, $z \in U$.

Preuve. 2.

$$\frac{(fg)(z) - (fg)(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z) + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} f(z_0)$$

$$\longrightarrow_{z \to z_0} f'(z_0) g(z_0) + g'(z_0) f(z_0).$$

3. On regarde $1/g$: $g(z_0) \neq 0 \overset{\text{Lemme}}{\Longrightarrow} g(z) \neq 0 \ \forall z \in D(z_0, \delta)$.

$$\frac{(1/g)(z) - (1/g)(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(z_0) - g(z)}{g(z) g(z_0)(z - z_0)} =$$

$$-\frac{1}{g(z) g(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \to -\frac{1}{g^2(z_0)} g'(z_0).$$

■

Exemples

1. $f_n(z) = z^n \in H(\mathbb{C})$ et $f_n'(z) = nz^{n-1}$ car:
   $f_1'(z) = 1$,
   par récurrence: $n \to n+1$:
   $f_{n+1}(z) = z \cdot z^n \Longrightarrow f_{n+1}'(z) = 1 \cdot z^n + z \cdot (z^n)' = z^n + z \cdot nz^{n-1} = (n+1)z^n$.
2. Soit $p \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré N, i.e. $p(z) = \sum_{n=0}^{n} a_n z^n$, où $a_n \in \mathbb{C}$.

   Alors $p \in H(\mathbb{C})$ et $p'(z) = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}$.

3.1.4 Propriétés de la dérivée

Lemme 52.

$\Omega \subset \mathbb{C}$ domaine, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.
Alors f est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \Longleftrightarrow \exists g : \Omega \to \mathbb{C}$ continue en z_0 tq

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z).$$

Dans ce cas $f'(z_0) = g(z_0)$.

Preuve. "$\Longleftarrow$:" $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z) \Longrightarrow$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} g(z) \overset{g \text{ continue}}{=} g(z_0).$$

"$\Longrightarrow$" Supposons que $f'(z_0)$ existe. Posons

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0. \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

$\Longrightarrow g$ continue en z_0 car: $\lim_{z \to z_0} g(z) = f'(z_0) = g(z_0)$.
En plus, $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)$. ∎

Proposition 53.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ domaine, $h = u + iv : [0,1] \to \Omega$ un chemin $C^1([0,1])$, $f \in H(\Omega)$. Alors $g = f \circ h : [0,1] \to \mathbb{C}$ est un chemin $C^1([0,1])$ et $g'(t) = (f \circ h)'(t) = f'(h(t)) \cdot h'(t)$.

Preuve. On sait qu'elle existe une fonction F (resp. H) continue en $z_0 \in \Omega$ (resp. $t_0 \in [0,1]$) telle que

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)F(z) \quad \text{et} \quad h(t) = h(t_0) + (t - t_0)H(t).$$

En remplaçant $z \to h(t)$, $z_0 \to h(t_0)$, on obtient:
$f(h(t)) = f(h(t_0)) + (h(t) - h(t_0))F(h(t)) = f(h(t_0)) + (t - t_0)H(t)F(h(t)) \Longrightarrow f \circ h$ différentiable en t_0 car $t \mapsto H(t)F(h(t))$ continue en t_0. En plus
$(f \circ h)'(t_0) = \lim_{t \to t_0} H(t)F(h(t)) = H(t_0)F(h(t_0)) = h'(t_0)f'(h(t_0))$. ∎

Théorème 54.

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ domaine et $f \in H(\Omega)$. Supposons $f' \equiv 0$. Alors $f \equiv$ constante.

Preuve. (i) Fixons $z_0 \in \Omega$. Ω ouvert $\Longrightarrow \exists D = D(z_0, R) \subset \Omega$. Soit $z \in D$ et $S = \{h(t) := (1-t)z_0 + tz,\ 0 \le t \le 1\}$ le segment joignant z_0 et z; h est un chemin $C^1([0,1])$ avec $h(0) = z_0$, $h(1) = z$.
Considérons la fonction $f \circ h : [0,1] \to \mathbb{C}$. Elle est bien définie, $f \circ h \in C^1([0,1])$, et $(f \circ h)'(t) = f'(h(t))h'(t) = 0\ \forall t \in [0,1]$.
$(f \circ h)(t) = u(t) + iv(t)$, $(f \circ h)'(t) = u'(t) + iv(t) \equiv 0$ dans l'intervalle $[0,1] \Longrightarrow u' \equiv 0$ et $v' \equiv 0$ $\Longrightarrow u \equiv c$ (constante) et $v \equiv \tilde{c}$ (constante), $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$. Donc $f \circ h \equiv c + i\tilde{c}$ sur $[0,1]$. Ainsi $f(z_0) = f(h(0)) = f(h(1)) = f(z)$. Finalement

$$f(z) = f(z_0)\ \forall z \in D(z_0, R).$$

(ii) Soit $A := \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}$. Montrons que $A = \Omega$!

1. A est un fermé dans Ω car: $a_n \in A, a_n \to z \in \Omega \Longrightarrow f(z_0) = f(a_n) \to f(z) \Longrightarrow f(z) = f(z_0) \Longrightarrow z \in A$.

2. A ouvert dans Ω car: $a \in A \subset \Omega \underset{(i)}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 : D(a, \varepsilon) \subset \Omega$

   et $f \equiv f(a) = f(z_0)$ dans $D(a,\varepsilon) \Longrightarrow D(a,\varepsilon) \subset A$.

Donc: $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A)$ est une décomposition en deux ensembles ouverts et fermés dans Ω. Ω connexe, $A \neq \emptyset$, $\Longrightarrow \Omega \setminus A = \emptyset \Longrightarrow A = \Omega$. ■

3.1.5 Conditions de Cauchy-Riemann

Théorème 55.

(**Conditions de Cauchy-Riemann**) Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On pose $z = x+iy$, $f(z) = P(x,y)+iQ(x,y)$ où P, Q sont des fonctions réelles. Alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 = x_0+iy_0$ si et seulement si f est différentiable (au sens réel) en (x_0, y_0) et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Cette équivalence n'a pas été démontrée par Cauchy et Riemann, mais ils sont considérés comme les inventeurs de ces équations puisque c'est à la suite de leurs recherches qu'on a compris la relation qu'elles avaient avec l'holomorphie et qu'on a donc considérer cette forme de dérivabilité à travers des fonctions réelles représentant les parties réelle et imaginaire d'une fonction complexe. Ces travaux donneront lieu aux théorèmes intégral et des résidus de Cauchy et permettront à Weierstrass de développer sa théorie du prolongement analytique. Une grande partie de l'analyse complexe d'aujourd'hui prend donc racine au XIXème siècle.

3.2 Intégration dans le plan complexe.

3.3 Courbe, chemin et lacet.

Définition 56.

1. Une courbe dans $\mathbb{C}$ est une application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit aussi que γ est un paramétrage ou une paramétrisation de la courbe.

2. Une courbe est dite fermée si $\gamma(b) = \gamma(a)$.

3. Un chemin dans D est une application continue $\gamma : [0,1] \mapsto D$ qui est différentiable par morceaux: i.e. il existe $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = 1$ tel que $\forall s \in]t_j, t_{j+1}[$ et $\forall j \in \{0, \cdots, N-1\}$

$$\gamma'(s) = \lim_{t \to s} \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s}$$

existent et que les dérivées à droite

$$\gamma'_+(t_j) = \lim_{t \to t_j^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_j)}{t - t_j}$$

respectivement les dérivées à gauche

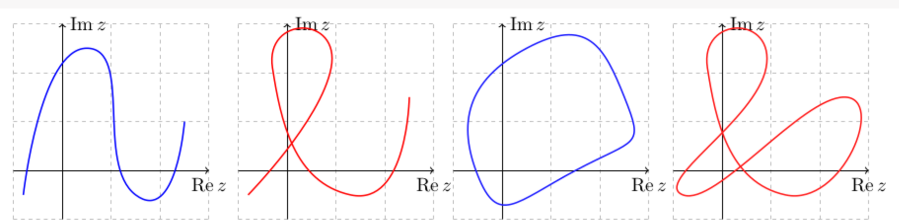
$$\gamma'_-(t_{j+1}) = \lim_{t \to t_{j+1}^-} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_{j+1})}{t - t_{j+1}}$$

existent.

4. Un chemin est dit simple si elle ne se recoupe pas, i.e. sa paramétrisation γ est injective, $\forall t, t' \in [a,b], \gamma(t) = \gamma(t') \Rightarrow t = t'$.

5. Un chemin fermé est appelée lacet. un lacet simple est un chemin fermé et simple.

6. Deux chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ sont dits équivalents si leurs images sont les mêmes. Il existe donc un reparamétrage du chemin γ_2 qui le transforme en γ_1, c'est-à-dire une fonction $u : [a_1, b_1] \longrightarrow [a_2, b_2]$ continue et dérivable par morceaux telle que $\gamma_1(x) = \gamma_2(u(x))$ pour tout $x \in [a_1, b_1]$.



Chemin non fermé et simple | Chemin non fermé et non simple | Chemin fermé et simple | Chemin fermé et non simple

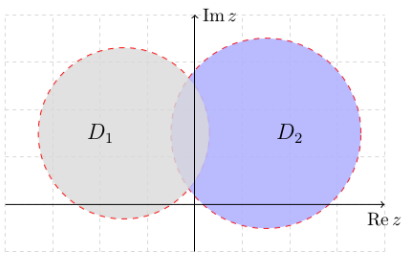
Exemple 12. *Soit C la courbe paramétrée par*

$$\begin{aligned} \gamma: \quad & [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{C} \\ & t \longmapsto \gamma(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t), \end{aligned}$$

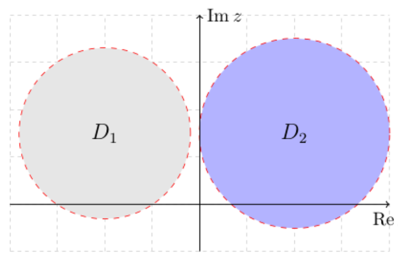
γ est une paramétrisation du cercle de centre $(0,0)$ de rayon 1. Le sens de l'orientation de C induite par φ est de $z_0 = \gamma(0)$ vers $z_1 = \gamma(\frac{\pi}{2})$.

Définition 57.

Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit connexe s'il n'admet aucune partition par deux ouvert non vides (E n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints).



L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ est connexe



L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ n'est pas connexe

Définition 58.

On dit que l'ensemble ouvert E est connexe par arcs si pour tout $x, y \in E$ il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to U$ entièrement inclus dans U tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Théorème 59.

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert . Alors U est connexe par arcs $\Longleftrightarrow$ U est connexe.

Remarque 9. *Les ouverts connexes par arcs sont donc exactement les ouverts connexes.*

Définition 60.

On dit que E est un domaine si E et un ouvert connexe.

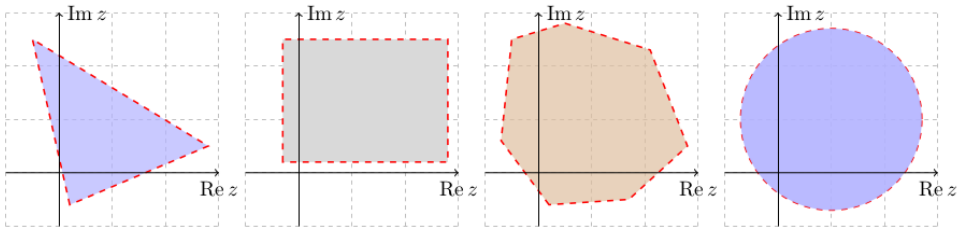
Exemple 1.

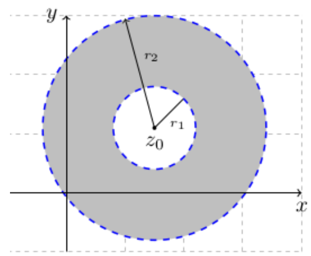
1. *Les triangles, les rectangles, les polygones et les disques ouverts sont des domaines*

2. *Si $0 \leq r_1 < r_2$, alors les couronnes*

$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

sont des domaines :



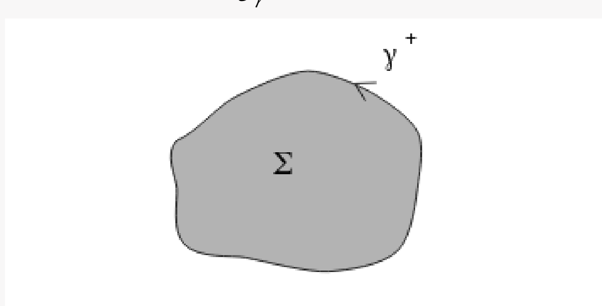


3.3.1 Intégrales curvilignes.

Définition 61.

1. Soient $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction et γ un chemin. On définit l'**intégrale de** f **sur le chemin** γ, sous réserve d'existence du membre de droite de la façon suivante :
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$
cette intégrale ne dépendant pas du chemin suivi pour deux chemins équivalent.

2. L'intégrale le long d'un chemin est appelée intégrale curviligne complexe.

3. Si la courbe γ est fermée et orientée dans le sens trigonométrique on note
$$\int_{\gamma^+} f(z)dz.$$


Si la courbe γ est orientée dans son sens inverse on note
$$\int_{\gamma^-} f(z)dz.$$

4. Le sens trigonométrique est aussi appelé le sens positif ou sens direct.

Longueur d'un chemin.

La **longueur** d'un chemin γ est donnée par :

$$\ell_\gamma \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt$$

On a alors la propriété intuitive suivante : l'intégrale d'une fonction analytique est plus petite que la longueur du chemin multipliée par la borne supérieure du module de la fonction :

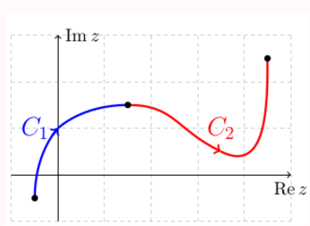
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \left(\sup_{z\in\gamma} |f(z)|\right)\ell_\gamma.$$

3.3.2 Propriétés

Proposition 62.

Soit C une courbe dans le plan complexe. On suppose que $C = C_1 \cup C_2$ avec le point final de la courbe C_1 coincide avec le point initial de la courbe C_2 (on dit qu'elle sont en juxtaposition). Si f et g sont continues le long de C, alors les propriétés ci-dessous se démontrent à l'aide des sommes de Riemann

1. $\displaystyle\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_C f(z)dz + \beta \int_C g(z)dz$
2. $\displaystyle\int_{C^+} f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$
3. $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1\cup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$



3.3.3 Théorème de Cauchy.

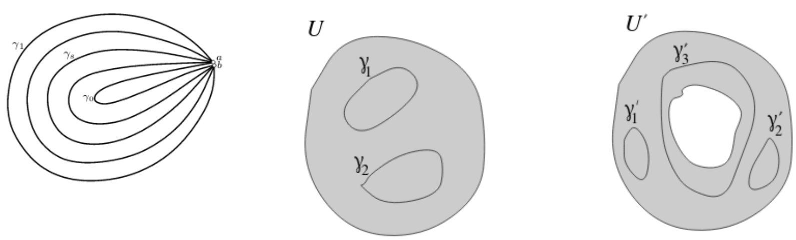
On suppose que pour chaque lacet, le paramètre t varie sur le même intervalle $I = [0,1]$, car on peut toujours satisfaire cette condition par un changement admissible de paramètre. On a la définition suivante.

Définition 63.

Deux lacets $\gamma_0 : [0,1] \to D$ et $\gamma_1 : [0,1] \to D$, où D est un ouvert de $\mathbb{C}$, sont dits homotopes si on peut passer de l'un à l'autre par déformation continue sans sortir de D, i.e. s'il existe une application continue H de $[0,1]\times[0,1]$ dans D telle que

$$\begin{array}{l} \forall t \in [0,1],\ H(t,0) = \gamma_0(t),\ H(t,1) = \gamma_1(t) \\ \forall s \in [0,1]\ H(0,s) = H(1,s). \end{array}$$

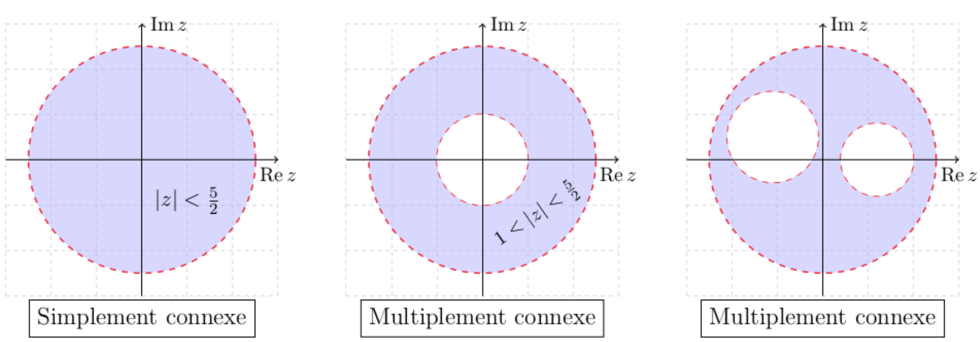
On dit que le lacet γ_0 est homotope à un point $a \in \mathbb{C}$ (on dit aussi homotope à zéro) si on peut le réduire par déformation continue à un point de D sans sortir de D, i.e. s'il existe une application continue H de $[0,1]\times[0,1]$ dans D vérifiant les conditions ci-dessus avec $\gamma_1(t) = a$.



γ_1 et γ_2 sont homotope à zéro dans U ainsi que γ_1' et γ_2' dans U', par contre γ_3' n'est pas homotope à zéro dans U'.

Définition 64.

Un domaine D du plan complexe est dit simplement connexe si toute lacet de D est homotope à zéro. i.e si toute lacet de D peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D.
Dans le cas contraire D est dit multiplement connexe.
Intuitivement, un domaine sans trous est simplement connexe mais s'il possède au moins un seul trou il est multiplement connexe.

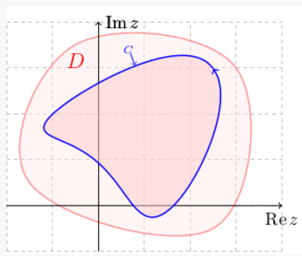


Le théorème fondamental suivant est souvent appelé théorème de Cauchy, il est à la fois valable pour des domaines simplement connexes ou multiplement connexes. Il existe deux démonstrations différentes de ce théorème. Il fut d'abord démontré à l'aide de la formule de Green-Riemann, ce qui nécessite l'introduction des formes différentielles et l'intégrale double. Plus tard Édouard Goursat en proposa une autre démonstration, c'est pourquoi on l'appelle quelquefois théorème de Cauchy-Goursat.

Théorème 65.

Si f est holomorphe dans un domaine simplement connexe D de $\mathbb{C}$. Alors pour tout lacet simple C dans D:

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 0}.$$

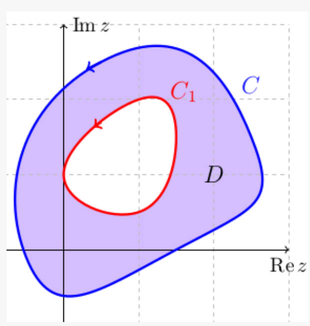


Théorème 66.

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe limité par deux lacets simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors

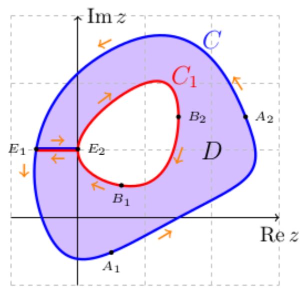
$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz}$$

où C et C_1 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.



Remarque 10. *Ce résultat montre que si nous désirons intégrer f le long d'une courbe C nous pouvons remplacer C par toute courbe C_1 pourvu que f soit holomorphe dans l'ouvert connexe compris entre C et C_1.*

Preuve. Effectuons la coupure E_1E_2 et notons $C' = E_1A_1A_2E_1E_2B_2B_1E_2 = E_1A_1A_2E_1 \cup E_1E_2 \cup E_2B_2B_1E_2 \cup E_2E_1 := C \cup C_3 \cup C_1 \cup C_5$. La fonction f étant holomorphe dans l'ouvert



simplment connexe C, nous avons d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{C'} f(z)dz = 0.$$

Donc

$$\int_{C} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_5} f(z)dz = 0.$$

Comme

$$\int_{C_3} f(z)dz = -\int_{C_5} f(z)dz,$$

alors

$$\int_{C} f(z)dz = 0 = \int_{C_1} f(z)dz = 0$$

■

Une conséquence du théorème de Cauchy est le corollaire suivant.

Corollaire 67.

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D et soient a et z des points de D. Alors la fonction $z \to F(z) = \int_a^z f(u)du$ est holomorphe dans D et a $F'(z) = f(z)$.

Ce corolaire montre que si f est holomorphe, alors elle admet une primitive holomorphe. Ce résultat n'est pas valable pour les domaines multiplement connexes. En effet, par exemple la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$par $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais sa fonction primitive $z \to F(z) = \ln z$ n'est pas holomorphe sur C^* (voir section fonctions analytiques pour la définition de $\ln z$).

3.3.4 Exemple fondamental

Proposition 3.3.1. *Pour $m \in Z$ et $a \in \mathbb{C}$, considérons la fonction de la variable complexe $z \mapsto \dfrac{1}{(z-a)^m}$. C'est une fonction définie et holomorphe sur le domaine connexe (mais non simplement* *connexe) $D = \mathbb{C} - \{a\}$. Considérons d'autre part un circuit Γ constitué par un cercle de rayon r centré au point a. Alors*

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^m} dz = \begin{cases} 0 & si\ m \neq 1, \\ 2i\pi & si\ m = 1. \end{cases}$$

Preuve 1. *Paramétrons le circuit Γ de la manière suivante*

$$z(t) = a + re^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

de sorte que

$$\frac{dz(t)}{dt} = ire^{it}$$

et

$$f(z(t)) = r^{-m} e^{-imt},$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} I = \int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^m} dz &= \int_{[0,2\pi]} f(z(t)) . \frac{dz(t)}{dt} dt \\ &= \int_{[0,2\pi]} r^{-m} e^{-imt} ire^{it} dt \\ &= ir^{1-m} \int_{[0,2\pi]} e^{i(1-m)t} dt, \end{aligned}$$

d'où le résultat

$$\begin{cases} I = 0, & si\ m \neq 1; \\ I = 2i\pi, & si\ m = 1. \end{cases}$$

3.3.5 Formules intégrales de Cauchy.

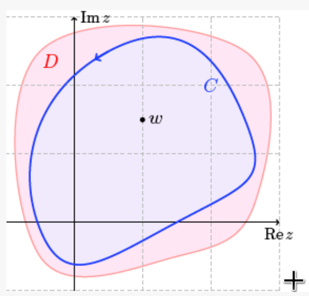
Théorème 68.

Soient f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe D non vide de $\mathbb{C}$ et C un lacet simple contenue ainsi que son intérieure dans D. Si ω est un point intérieur à C, alors

$$\boxed{f(\omega) = \frac{1}{2\mathbf{i}\pi}\int_{C_+}\frac{f(z)}{z-\omega}dz}.$$

De même la n-ième dérivée de f en z_0 est donnée par

$$\boxed{f^{(n)}(\omega) = \frac{n!}{2\mathbf{i}\pi}\int_{C_+}\frac{f(z)}{(z-\omega)^{n+1}}dz},$$



Remarque 11. 1. *Les deux formules précédentes sont appelées formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C, alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C.*

2. *le chemin C_+ un contour tournant dans le sens trigonométrique direct, et C_- un contour tournant dans le sens trigonométrique indirect, et n'effectuant qu'un seul tour dans le plan complexe.*

3. *Si une fonction de la variable complexe admet une dérivée première dans un domaine simplement connexe D, toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans D. Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.*

3.4 Fonctions analytiques

3.4.1 Relation entre analyticité et holomorphie

Définition 69.

Une fonction f est analytique dans son domaine de définition D si pour tout z_0 dans D elle peut se développer en série entière dans un disque ouvert non vide centré en z_0 et inclus dans D selon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Théorème 70.

Une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ est holomorphe dans son disque de convergence, de dérivée

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Théorème 71.

Une série entièref $(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est indéfiniment dérivable dans son disque de convergence, de dérivée k-ième

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Corollaire 72.

D'après le théorème précédent, une fonction analytique est holomorphe.

Théorème 73.

Si D un ouvert dans $\mathbb{C}$, alors toute fonction f holomorphe dans D est analytique dans D.

Les fonctions homomorphe dans $\mathbb{C}$ sont dites entières.

3.4.2 Fonctions analytique susuelles:

- ***Fonction Exponentielle :***

  (*) $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$

- ***Fonctions hyperboliques :*** *Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique par*

  1. $ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}$
  2. $sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall z \in \mathbb{C}$

  On a aussi $ch'(z) = sh(z), \quad sh'(z) = ch(z).$

- ***Fonctions trigonométriques :***

  1. $\cos z = ch\,(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}$
  2. $\sin z = -i \sin(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$

On a aussi $\cos' z = -\sin z, \quad \sin' z = \cos z.$

Détermination principale de la fonctionlogarithme

La fonction exponentielle n'est pas surjective puisqu'elle ne s'annule jamais; elle n'est pas non plus injective.On ne peut donc espérer définir une fonctionr réciproque de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ tout entier. Par contre sur la coupure $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, on peut définir une fonction inverse de l'exponentielle par

$$\ln(z) = \ln|z| + i arg(z), \quad arg(z) \in]-\pi, \pi].$$

Avec, $arg(z)$ est l'argument de z.

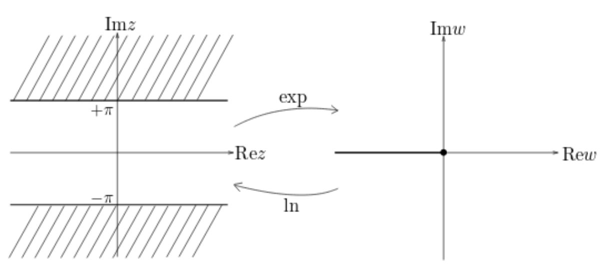


Fig. Gauche : exemple de domaine restreint de défi nition de l'exponentielle assurant son injectivité. Droite: domaine image par l'exponentielle, sur lequel est définie la détermination principale de la fonction logarithme.

Cette détermination principale de la fonction logarithme (on pourrait définir une infinité d'autres déterminations en changeant la définition de la fonction argument) vérifie bien

$$e^{\ln(z)} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-.$$

- ***Développement de*** $(1+x)^{\alpha}$

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n,\ \forall |z| < 1$

2. $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,\ \forall |z| < 1$

3. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\ \forall |z| < 1$

3.5 Séries de Taylor et de Laurent

3.5.1 Série de Taylor.

Développement de Taylor.

Soit f une fonction de classe C^k sur un intervalle J et de classe C^{k+1} par morceaux sur J. Soit $x_0 \in J$. Alors, pour tout $x \in J$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_k(x)$$

avec le reste de la formule de Taylor :

$$R_k(x) = \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \theta x)$$

ou avec le reste sous la forme d'une intégrale :

$$R_k(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

*On dit alors que $f(x)$ est développée en **série de Taylor** au voisinage du point x_0.*

Formule de Taylor-Lagrange.

Dans les mêmes conditions :

$$\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right\| \leq \frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{t\in[a,b]} \left\| f^{(k+1)}(t) \right\|$$

3.5.2 Séries de Laurent

Définition 74.

Une série de la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

s'appelle série de Laurent centrée au point $z_0 \in \mathbb{C}$. La série des puissances négatives $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ s'appelle la partie principale. La série des puissances positives $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ s'appelle la partie régulière ou analytique.
Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

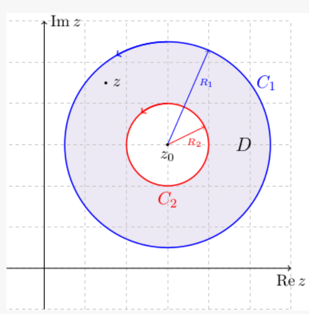
Théorème 75.

Soit C_1 et C_2 des cercles de centre z_0 et de rayons respectifs R_1 et R_2. On suppose que f est holomorphe sur C_1 et C_2 et également dans la couronne D limitée par C_1 et C_2. Les courbes C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs. Alors la fonction f se développe de manière unique en série de Laurent centrée au point z_0 i.e. $\forall z \in D$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

où

$$a_n = f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\mathbf{i}\pi} \int_{C_+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$



Développons en série de Laurent la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

dans le disque pointé de $z_0 = -1$

$$D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z+1| < 1\}.$$

Notons que pour tout $0 < |z+1| < 1$ *on peut écrire*

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z+1+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z+1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z+1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\left(z+1\right)^n$$

Donc

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\left(z+1\right)^{n-1} = \frac{1}{2(z+1)} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}\left(z+1\right)^n.$$

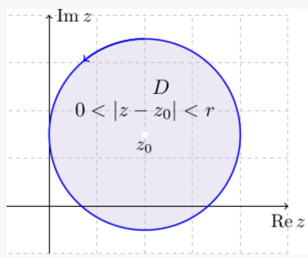
3.6 Théorème des résidus.

3.6.1 Classifications des zéros d'une fonction holomorphe.

Définition 76.

Le point z_0 *est appelé singularité isolée, ou point singulier isolé de* f*, si la fonction* f *est holomorphe sur un disque pointé de* z_0*, i.e.*

$$D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-z_0| < r\}, r > 0.$$



Il est possible de classer les singularités isolées d'une fonction f *par l'examen de sa série de Laurent.*
Pôle :
Si, dans le développement de f *en série de Laurent, la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{p} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

où $a_{-p} \neq 0$*, alors* $z = z_0$ *est appelé un pôle d'ordre* p*. Si* $p = 1$*,* f *possède un pôle simple.*
On a déjà vu que

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\left(z+1\right)^{n-1} = \frac{1}{2(z+1)} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}\left(z+1\right)^n.$$

On a $a_{-1} \neq 0$*. Donc* f *présente un pôle simple au point* $z_0 = -1$*.*

Singularités apparentes :
Si une fonction f *n'est pas définie en* $z = z_0$ *mais si* $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *existe (*f *est prolongeable en une fonction holomorphe), alors*$z = z_0$ *est appelée une singularité apparente. Dans un pareil cas on*

définit $f(z)$ *pour* $z = z_0$ *comme étant égal à* $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

Si $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$, *alors* $z = 0$ *est une singularité apparente car* $f(0)$ *n'est pas défini mais*

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1.$$

Donc f *est prolongeable en une fonction holomorphe en O.*
Singularités essentielles:
Si f *est alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une singularité essentielle. Si* $z = z_0$ *est une singularité essentielle de* f, *la partie principale du développement de Laurent possède une infinité de terme.*

3.7 Théorème des résidus.

3.7.1 Calcul pratique des résidus.

Soit f *une fonction holomorphe à l'intérieur d'un cercle C et sur* $\mathbb{C}$, *excepté au point* $z = z_0$ *centre de C. Alors comme nous l'avons vu dans la section précédente,* f *possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de* $z = z_0$, *donné par*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

où

$$a_n = f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\mathbf{i}\pi} \int_{C_+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Définition 77.

Avec les notations ci-dessus, le coefficienta$_{-1}$ *du développement de Laurent de* f *au voisinage de* z_0 *s?appelle le résidu de* f *au point* z_0 *et se note*

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\mathbf{i}\pi} \int_{C_+} f(z) dz$$

Dans beaucoup de cas on peut déterminer le résidu sans passer par le développement de Laurent.

Pôle simple :

Si $z = z_0$ *est un pôle simple le calcul du résidu est particulièrement simple*

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Pôles multiples.

Résidu en un pôle multiple $z = z_0$ *d'une fonction de la forme* $f(z) = P(z)/(z - a)^n$:

$$Res\left(\frac{P(z)}{(z - z_0)^n}; z_0\right) = \frac{P^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

Si $z = z_0$ est un pôle simple et f se présente sous la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z_0)} = 0, Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0,$$

alors en utilisant la règle de L'Hôpital, nous avons

$$Res(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Généralisations pour les ***pôles multiples*** *d'ordre n :*

$$Res(f(z); z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \longrightarrow z_0} \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} \left[(z-z_0)^n f(z) \right] \right)$$

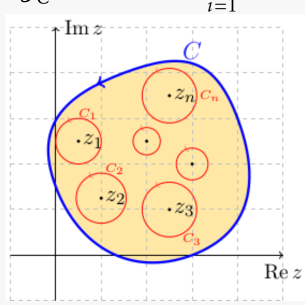
3.7.2 Théorème des résidus.

On a le théorème des résidus suivant.

Théorème 78.

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'un lacet C et sur C, sauf en un nombre fini de singularités $z_1, z_2, \cdots, z_n$ intérieures à C. L'intégrale de f le long de C est égale à 2?i fois la somme des résidus de f en les singularités contenues dans C, i.e.

$$\int_C f(z)dz = 2\mathbf{i}\pi \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i).$$



Preuve. *On construit les cercles $C_1, C_2, \cdots, C_n$ centrés en $z_1, z_2, \cdots, z_n$ et situés entièrement à l'intérieur de C. D'après le théorème 66, on a*

$$\int_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)dz.$$

Comme on a

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\mathbf{i}\pi} \int_{C_+} f(z)dz,$$

il viendra que

$$\int_C f(z)dz = 2\mathbf{i}\pi \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i).$$

■

3.7.3 Les lemmes de Jordan.

Lemme 79.

1) Si $|zf(z)| \leq M_R$ *sur un arc de cercle* C_R *centré à l'origine et de rayon* R *et si* $M_R \longrightarrow 0$ *quand* $R \longrightarrow \infty$*, alors*

$$\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$$

2) Si $|zf(z)| \leq M_r$ *sur un arc de cercle* C_r *centré à l'origine et de rayon* r *et si* $M_r \longrightarrow 0$ *quand* $r \longrightarrow 0$*, alors*

$$\lim_{r\longrightarrow 0}\int_{C_r} f(z)dz = 0$$

3) Si $|f(z)| \leq M_R$ *sur un demi-cercle* C_R *centré à l'origine et de rayon* R *dans un demi-plan et si* $M_R \longrightarrow 0$ *quand* $R \longrightarrow \infty$*, alors, pour tout* $m > 0$*,*

a) $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{C_R} f(z)e^{\mathbf{i}mz}dz = 0$*, si* C_R *est dans le demi-plan supérieur* $Imz > 0$

b) $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{C_R} f(z)e^{-\mathbf{i}mz}dz = 0$*, si* C_R *est dans le demi-plan inférieur* $Imz < 0$

c) $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{C_R} f(z)e^{-mz}dz = 0$*, si* C_R *est dans le demi-plan droit* $Rez > 0$

d) $\displaystyle\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{C_R} f(z)e^{mz}dz = 0$*, si* C_R *est dans le demi-plan gauche* $Rez < 0$

3.7.4 Formules applicables aux calculs d'intégrales infinies.

Si $f(z) = P(z)/Q(z)$ *est une fraction rationnelle où* $P(z)$ *et* $Q(z)$ *sont respectivement des polynômes de degrés* p *et* q*, alors on utilisera le lemme précédent 1) de Jordan pour* $q > p+1$ *et le le lemme précédent 3) pour* $q > p$*.*
Si une fonction $f(x)$ *de la variable réelle* x *n'a aucune singularité sur l'axe réel, que* $f(z)$ *n'a que des pôles simples sur un des demi-plan imaginaire, et que le lemme du Jordan s'applique, alors si* $f(z)$ *a* n *pôles dans ce demi-plan :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 2\mathbf{i}\pi\sum_{k=1}^{n} Res(f(z); z_k \in \mathbb{C}_+) \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= -2\mathbf{i}\pi\sum_{k=1}^{n} Res(f(z); z_k \in \mathbb{C}_-)
\end{aligned}$$

Si $f(z)$ *a un pôle simple en* $z = a$ *et si* C_ρ *est un arc de cercle centré en* a*, de rayon* ρ *et dont l'angle d'ouverture dans le sens du parcours est* α*, alors*

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\int_{C_\rho} f(z)dz = \mathbf{i}\alpha Res(f(z); a)$$

Si une fonction $f(x)$ *a une singularité sur l'axe réel au point* $z = a$ *en plus des propriétés énoncées* *ci-dessus, alors on la défini en partie principale*[1] *et :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \mathbf{i}\pi Res(f(z);a) + 2\mathbf{i}\pi \sum_{k=1}^{K} Res(f(z);z_k \in \mathbb{C}_+) \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= -\mathbf{i}\pi Res(f(z);a) - 2\mathbf{i}\pi \sum_{k=1}^{K} Res(f(z);z_k \in \mathbb{C}_-)
\end{aligned}$$

Intégrales du type $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx dx$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx dx$.

Pour les intégrales du type $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx dx$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx dx$ où $f(z)$ remplit les conditions du le lemme précédent 3) et n'a aucune singularités sur l'axe réel, on utilise :

$$\begin{aligned}
I_+ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathbf{i}mx}dx = 2\mathbf{i}\pi \sum_{k=1}^{K} Res\left(f(z)e^{\mathbf{i}mz};z_k \in \mathbb{C}_+\right) \\
I_- &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathbf{i}mx}dx = -2\mathbf{i}\pi \sum_{k=1}^{K} Res\left(f(z)e^{-\mathbf{i}mz};z_k \in \mathbb{C}_-\right)
\end{aligned}$$

Si la fonction $f(z)$ a une singularité sur l'axe réel en $z = a$, on utilisera :

$$\begin{aligned}
Pp[I_+] &= \pi\mathbf{i}Res\left(f(z)e^{\mathbf{i}mz};a\right) + 2\mathbf{i}\pi \sum_{k=1}^{K} Res\left(f(z)e^{\mathbf{i}mz};z_k \in \mathbb{C}_+\right) \\
Pp[I_-] &= -\pi\mathbf{i}Res\left(f(z)e^{-\mathbf{i}mz};a\right) - 2\mathbf{i}\pi \sum_{k=1}^{K} Res\left(f(z)e^{-\mathbf{i}mz};z_k \in \mathbb{C}_+\right)
\end{aligned}$$

Et on utilise ces résultats dans les formules :

$$\begin{aligned}
Pp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx dx &= Re\{Pp[I_+]\} \\
Pp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx dx &= \pm Im\{Pp[I_\pm]\}
\end{aligned}$$

[1] La partie principale est notée Pp et signifie

$$\mathrm{Pp}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

Intégrales du type $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$**.**

Si la fonction $R(\cos\theta, \sin\theta)$ *est une fraction rationnelle dans les deux variables* $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$*, définie pour toutes les valeurs réelles de* θ*, on fait le changement de variables* $z = e^{\mathbf{i}\theta}$ *et on définit la fonction*

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

et on a alors :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = 2\pi \sum_{k=1}^{K} Res\left(\varphi(z); z_k \in \mathbb{C}_+\right)$$

Intégrales du type $\int_0^{\infty} x^{a-1} Q(x)\, dx$**.**

Si la fonction est de la forme $f(z) = z^{a-1}Q(z)$ *avec* $f(z)$ *ayant un point critique en* $z = 0$*, alors il faut créer une coupure depuis* $z = 0$ *qui va influencer la valeur des arguments dans le calcul des résidus pour la fonction* z^{a-1}*. Si* $a \in \{\mathbb{R} - \mathbb{N}\}$*,* z *est un point de branchement, si* a *est rationnel, la singularité est algébrique, si* a *est irrationnel, la singularité est logarithmique. Il faut que* $Q(z)$ *n'est pas de pôle en* $z = 0$ *et qu'elle vérifie les conditions du lemme 1 de Jordan, alors :*

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} Q(x)\, dx = \frac{\pi e^{-\pi \mathbf{i}(a-1)}}{\sin \pi a} \sum_{k=1}^{K} Res\left(z^{a-1} Q(z); z_k\right)$$

Dans les mêmes conditions et si il existe $c > 0$ *telle que sur un arc de cercle* C_R *centré à l'origine et de rayon* R*, la fonction* $f(z)$ *satisfait la condition*

$$\left|z^{1+c} f(z)\right| \leq M_R \text{ avec } M_R \longrightarrow 0 \text{ pour } R \to \infty$$

alors, si on appelle $\log z$ *la détermination principale de* $\ln z$ *définie réelle au dessus d'une coupure sur* $\mathbb{R}_+$ *soit dans le demi-plan* $\mathbb{C}_+$ *on a avec* $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ *:* $\log z = \ln\rho + \mathbf{i}\theta$*,* $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *et on peut utiliser la formule :*

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = -\sum_{k=1}^{K} Res\left(f(z) \log z; z_k\right)$$

3.7.5 Calculs de sommes infinies.

Considérons une série de la forme $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$ *où* f *est une fonction donnée, décroissant suffisamment vite pour que la somme ait un sens et n'ayant pas de pôle sur l'axe réel. on vérifie que*

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=1}^{K} Res\left(\pi f(z) \cot \pi z; z_k\right)$$

3.7.6 Exemple

Calcul de l'intégrale $I(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$ pour $t > 0$ puis pour t réel.
On choisit la fonction de la variable complexe z

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2},$$

définie et holomorphe sur $D = \mathbb{C}$ privé des deux points i et $-i$. On choisit un contour constitué d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels et d'un demi-cercle $\Gamma(R)$, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel, de rayon R assez grand pour entourer le point i.
Comme $1 + z^2 = (z-i)(z+i)$ et que le numérateur de $f(z)$ ne s'annule pas pour $z = i$, le point $a_1 = i$ est de toute évidence un pôle simple pour la fonction f.
Application du théorème des résidus.

$$\int_{[-R,R]} f(z)dz + \int_{\Gamma(R)} f(z)dz = 2i\pi Rés(f, i).$$

Application du Lemme de Jordan.
Calculons $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma(R)} f(z)\,dz$. On a

$$zf(z) = z\frac{e^{itz}}{1+z^2},$$

et pour $z \in \Gamma(R)$ la paramétrisation

$$z(\theta) = R\cos\theta + iR\sin\theta \quad \theta \in [0, \pi].$$

Par conséquent,

$$|zf(z)| = R\frac{e^{-Rt\sin\theta}}{|R^2e^{2i\theta}+1|} \le \frac{R}{|R^2-1|},$$

car $t\sin\theta \ge 0$.

1. *Posons $M(R) = \frac{R}{|R^2-1|}$. Puisque de toute évidence $\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$, il y a une valeur R_0 telle que pour $R > R_0$ on ait $M(R) < M(R_0)$.*
2. *Par ailleurs on a*

   $$\lim_{R\to\infty} |zf(z)| = 0,$$

   ce qui impose que $\lim_{R\to\infty} zf(z) = 0$, donc que $l_2 = 0$.

Le lemme **??** *s'applique donc sur $\Gamma(R)$,*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma(R)} f(z)\,dz = 0.$$

Calcul du résidus de f en $z = i$. *Puisque le point i est pôle simple de f, on peut appliquer la formule* **??** *donnant le résidu en un pôle simple*

$$Rés(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-t}}{2i}.$$

Calcul de $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. *La fonction* $x \mapsto f(x)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$*, on a donc*

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} f(z)\,dz &= \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} f(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Prenons la $\lim_{R\to\infty}$ *de chacun des deux membres de la formule du théorème des résidus,*

$$\lim_{R\to\infty}[\int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\Gamma(R)} f(z)\,dz] = 2i\pi\frac{e^{-t}}{2i}.$$

Finalement, pour $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-t}.$$

Chapitre 4

Annexe : Séries entières

Dans le chapitre précédent, nous avons vu les propriétés générales des ***séries de fonctions****. Dans ce chapitre, nous allons étudier une famille particulière de séries de fonctions,* ***les séries entières****, qui possèdent des propriétés particulières.*
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Définition

Définition 80.

- *On appelle* ***série entière complexe*** *toute série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de fonctions définies de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f_n(z) = a_n z^n$, où $(a_n)_n$ est une suite de $\mathbb{K}$.*
- *On appelle* ***série entière réelle*** *toute série $\sum_{n\geq n} f_n$ de fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ par $f_n(t) = a_n t^n$, où $(a_n)_n$ est une suite de $\mathbb{K}$.*

Remarque 12.

- *Dans la suite de ce chapitre, on considère surtout des séries entières complexes. Les propriétés des séries entières réelles s'en déduisent.*
- *En pratique, la suite $(a_n)_n$ est souvent une suite réelle.*
- *Les scalaires $(a_n)_n$ sont appelés les coefficients de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.*
- *Le scalaire a_n est le $(n+1)$-ième coefficient de la série ou encore le coefficient d'ordre n. Le scalaire a_0 est le terme constant de la série.*

Exemple 13. *1.)* $\sum_{n\geq 0} z^n$ *2.)* $\sum_{n\geq 0} nz^n$ *3.)* $\sum_{n\geq 0} n!z^n$ *4.)* $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ *5.)* $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ *6.)* $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

4.1.1 Rayon de convergence : propriétés et définition

Proposition 81.

Si une série entière (de terme général $a_n z^n$) converge pour un complexe z_0 ($z_0 \neq 0$), alors elle converge absolument pour tout complexe z vérifiant $|z| < |z_0|$.

Preuve. *La convergence de la série numérique de terme général $a_n z_0^n$ implique que $\lim_{n\to+\infty} a_n z_0^n = 0$. On peut déduire donc que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée. C-à-d, il existe une constante $M \geq 0$ telle que, pour tout entier n, $|a_n z_0^n| \leq M$.*
Ainsi, pour tout complexe z (fixé) tel que $|z| < |z_0|$, on a $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \times |\frac{z^n}{z_0^n}| \leq M|\frac{z^n}{z_0^n}|$. Puisque

$|\frac{z}{z_0}| < 1$, *la série de terme général* $M|\frac{z}{z_0}|^n$ *converge et il en est donc de même de la série de terme général* $|a_n z^n|$. ■

Lemme 4.1.1. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière, s'il existe un complexe non nul* z_0 *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_n$ *soit bornée alors la série entière* $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ *converge pour tout complexe z vérifiant* $|z| < |z0|$.

Lemme 4.1.2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière. Soit* λ *un réel vérifiant* $0 \leq \lambda < 1$. *S'il existe un complexe non nul* z_0 *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_n$ *soit bornée alors la série entière* $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ *est normalement convergente sur le disque fermé de centre* 0 *et de rayon* $\lambda|z_0|$, *c'est-à-dire pour tous les complexes z vérifiant* $|z| \leq \lambda|z_0|$.

Théorème 82.

Soit $(a_n)_n$ *une suite de* $\mathbb{K}$.

- *L'ensemble* $I = \{r \in \mathbb{R}_+ / \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}_+$ *contenant* 0.
- *La borne supérieure* $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *de cet ensemble est appelée* ***rayon de convergence de la série entière*** $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Preuve. *Il est clair que* $0 \in I$ *et, pour tout* $r \in I$, *le segment* $[0; r] \subset I$. *Il en résulte que I est un intervalle de* $\mathbb{R}_+$.

Exemple 1.

- *Le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0} z^n$ *est* $R = 1$.
- *Le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0} n! z^n$ *est* $R = 0$.
- *Le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ *est* $R = +\infty$.

Théorème 83.

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est caractérisé par*

- $|z| < R \Rightarrow$ *la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge absolument ;*
- $|z| > R \Rightarrow$ *la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *diverge.*

Remarque 13.

- *On ne change pas le rayon de convergence d'une série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *en modifiant un nombre fini de coefficients* a_n.
- *Par définition, les séries* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} |a_n| z^n$ *ont le même rayon de convergence.*
- *Pour tout* $\lambda \neq 0$, *les séries* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n z^n$ *ont même rayon de convergence.*
- *Soient* R_1 *et* R_2 *les rayons de convergence respectifs de deux séries* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$. *S'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$ *on a* $|a_n| \leq |b_n|$, *alors on a* $R_2 \leq R_1$ *(Exercice).*
- *Soients* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *deux séries entières. On suppose qu'il existe* $\lambda > 0$ *et* $\mu > 0$, *tels que, à partir d'un certain rang,* $\lambda|a_n| \leq |b_n| \leq \mu|a_n|$, *alors les séries ont le même rayon de convergence. De même si* $|a_n| \sim |b_n|$ *(au voisinage de* $+\infty$*).*

Proposition 84.

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une suite entière et* $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *son rayon de convergence.*

- *Si* $R = 0$, *alors la série ne converge que pour* $z = 0$.
- *Si* $R = +\infty$, *alors la série converge absolument et simplement sur* $\mathbb{C}$. *De plus, cette convergence est normale (donc uniforme) sur tout ensemble borné de* $\mathbb{C}$.
- *Si* R *est un nombre réel strictement positif, alors la série converge absolument sur le disque ouvert* $B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ *et la série diverge sur* $\{z \in \mathbb{C} / |z| > R\}$. *De plus, cette convergence est normale (donc uniforme) sur tout ensemble fermé borné (compact) de* $B(0,R)$. *En particulier pour le disque fermé* $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \rho\}$ *quelque soit le réel positif* $\rho < R$.

Preuve. *On a*

- *si* $R = 0$, *pour tout complexe non nul* z, *la suite* $(a_n|z|^n)_n$ *ne tend pas vers* 0 *donc* $(a_n z^n)_n$ *ne tend pas vers* 0. *La série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *diverge.*
- *Si* $R = +\infty$, *alors, pour tout complexe non nul* z, *par exemple, la suite* $(a_n(2z)^n)_n$ *est bornée. Puisque* $|z| \leq |2z|$, *d'après le lemme d'Abel, la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge absolument.*
- *Il suffit d'appliquer le Théorème 2.*

Définition 85.

Soit R *un réel strictement positif,* $B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ *est appelé* ***disque ouvert de convergence*** *de* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. *Lorsque* $R = +\infty$, *on pose* $B(0,R) = \mathbb{C}$.

Remarque 14.

- *Dans le cas d'une série entière réelle* $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ *de rayon de convergence* R. *L'intervalle ouvert de convergence de la série est* $]-R,R[$ *si* $R\in\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}$ *si* $R=+\infty$.

- *En général, on ne peut rien dire si* $|z|=R$. *Par exemple, les séries entières réelles* $\sum_{n\geq 0} t^n$, $\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n}$ *et* $\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n^2}$ *ont toutes les trois un rayon de convergence égal à 1. Dans* $\mathbb{R}$, $|t|=1$ *implique* $t=-1$ *ou* $t=1$. *Les séries* $\sum_{n\geq 0} 1^n$, $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ *et* $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}$ *sont divergentes et les séries* $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}$ *et* $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n^2}$ *sont convergentes.*

- *Une série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *n'est pas nécessairement uniformément convergente (et, à fortiori, pas normalement convergente) sur tout son disque ouvert de convergence. Par exemple, la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme* $[-a,a]$ *où* $0<a<1$ *mais elle n'est pas uniformément convergente sur* $]-1;1[$.

Proposition 86.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière, et soit* R *son rayon de convergence.*

Si $\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=\ell\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$, *alors on a* $R=\frac{1}{\ell}$ *avec la convention :* $R=+\infty$ *si* $\ell=0$ *et* $R=0$ *si* $\ell=+\infty$.

Preuve. *On a* $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}}=|a_n|^{\frac{1}{n}}\times|z|$. *Pour montrer le résultat de la proposition, il suffit d'utiliser la règle de Cauchy sur les séries numériques à termes positifs.*

- *Si* $\ell\in\mathbb{R}_+^*$, *on a* $\limsup_{n\to+\infty}|a_n z^n|^{\frac{1}{n}}=\ell\times|z|$. *Si* $|z|<\frac{1}{\ell}$, *on a* $\limsup_{n\to+\infty}|a_n z^n|^{\frac{1}{n}}<1$ *et la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge absolument. Si* $|z|>\frac{1}{\ell}$, *on a* $\limsup_{n\to+\infty}|a_n z^n|^{\frac{1}{n}}>1$ *et la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *diverge. Par conséquent,* $R=\frac{1}{\ell}$.

- *Si* $\ell=0$, *pour tout complexe* z, $\limsup_{n\to+\infty}|a_n z^n|^{\frac{1}{n}}=0<1$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge absolument.*

- *Si* $\ell=+\infty$, *pour tout complexe non nul* z, $\limsup_{n\to+\infty}|a_n z^n|^{\frac{1}{n}}=+\infty>1$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *diverge.*

■

Proposition 87.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, et soit R son rayon de convergence. On suppose qu'à partir d'un certain rang les coefficients a_n sont non nuls.
Si $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors on a $R = \frac{1}{\ell}$ avec la convention : $R = +\infty$ si $\ell = 0$ et $R = 0$ si $\ell = +\infty$.

Preuve. *On a $|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \times |z|$. Pour montrer le résultat de la proposition, il suffit d'utiliser la règle de D'Alembert sur les séries numériques à termes positifs.*

- *Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}| = \ell \times |z|$. Si $|z| < \frac{1}{\ell}$, on a $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}| < 1$ et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument. Si $|z| > \frac{1}{\ell}$, on a $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}| > 1$ et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge. Par conséquent, $R = \frac{1}{\ell}$.*
- *Si $\ell = 0$, pour tout complexe z, on a $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}| = 0 < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.*
- *Si $\ell = +\infty$, pour tout complexe non nul z, $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}| = +\infty > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.*

■

Exercice 88.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

- $\sum_{n\geq 0} n^2 z^n$.
- $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$.
- $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2} z^n$.
- $\sum_{n\geq 0} C_n^{2n} z^n$.
- $\sum_{n\geq 0} (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}) z^n$.

4.2 Fonction somme d'une série entière : Continuité et opérations

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$.

Théorème 89.

Une série entière converge normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé strictement inclus dans le disque ouvert de convergence.

Preuve. *Soient* R *le rayon de convergence et* $0 \leq r < R$ *; les inégalités*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq r \Rightarrow |a_n z^n| = |a_n| \times |z^n| \leq |a_n| \times r^n = \alpha_n$$

montrent que la série entière converge normalement sur le disque fermé de centre 0 *et de rayon* r*, puisque* α_n *est le terme général d'une série numérique convergente* ($r < R$). ■

Remarque 15.

- *Dans le cas réel, la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge normalement sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence* $]-R;R[$.
- *En général, il n'y a ni convergence normale, ni convergence uniforme sur le disque ouvert ou l'intervalle ouvert de convergence.*
  Exemple : la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$.

Théorème 90.

La somme d'une série entière est une fonction continue sur le disque ouvert de convergence.

■

Pour tout $n \in N$, $z \mapsto a_n z^n$ *est continue sur* $\mathbb{K}$*, la série entière converge uniformément sur tout disque fermé (strictement) inclus dans le disque ouvert de convergence, sa somme est donc continue sur tous les disques fermés du disque ouvert de convergence, donc continue sur ce disque ouvert de convergence.* ■

Remarque 16.

- *Dans le cas réel,* $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue sur l'intervalle ouvert de convergence* $]-R;R[$.
- *Si la série* $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ *est convergente, la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge normalement sur le disque fermé de centre* 0 *et de rayon* R*. La somme* S *est donc définie et continue sur le disque fermé* $\{z / |z| \leq R\}$.

Théorème 91.

Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *sont deux séries entières de rayon de convergence respectifs* R_1 *et* R_2*, alors :*

1. *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}^*$*, le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n z^n$ *est* R_1 *et :*

$$\forall z \in \mathbb{K}, |z| < R_1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

2. *le rayon de convergence* R_s *de la série entière* $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ *vérifie* $R_s = \min(R_1; R_2)$ *si* $R_1 \neq R_2$ *et* $R_s \geq R_1 = R_2$ *sinon, et :*

$$\forall z \in \mathbb{K}, |z| < \min(R_1; R_2) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

3. *le rayon de convergence* R_p *de la série entière produit* $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ *où* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *vérifie* $R_p \geq \min(R_1; R_2)$*, et :*

$$\forall z \in \mathbb{K}, |z| < \min(R_1; R_2) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)z^n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q\Big)$$

Preuve.

1. *Si* $\lambda \in \mathbb{K}^*$*, la suite* $(|a_n| r^n)_n$ *est majorée si et seulement si, la suite* $(|\lambda a_n| r^n)_n$ *l'est. Ainsi le rayon vaut* R_1.

2. *Si* $|z| < \min(R_1; R_2)$*, les séries* $\sum_{n\geq 0}|a_n| r^n$ *et* $\sum_{n\geq 0}|b_n| r^n$ *sont convergentes. la série* $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ *est (absolument) convergente,* $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ *et* $R_s \geq \min(R_1; R_2)$.
   Si les rayons R_1 *et* R_2 *sont distincts, par exemple* $R_1 < R_2$*, prenons* $r \in]R_1; R_2[$ *; les inégalités* $|a_n + b_n| r^n > |a_n| r^n - |b_n| r^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, montrent que la suite* $(|a_n + b_n| r^n)_n$ *n'est pas majorée, et donc* $R_s \leq r$*. Ainsi* $]R_1; R_2[\subset [R_s; +\infty[$ *et* $R_s \leq R_1 = \min(R_1; R_2)$*. D'où le résultat.*

3. *Si* $|z| < \min(R_1; R_2)$*, les séries* $\sum_{n\geq 0}|a_n||z|^n$ *et* $\sum_{n\geq 0}|b_n||z|^n$ *sont absolument convergentes. La série produit (de Cauchy) l'est aussi et l'on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k}\Big) = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q\Big)$$

∎

Remarque 17.

- *Lorsque les rayons de convergence R_1 et R_2 de deux séries sont égaux, on ne peut pas prévoir le rayon de convergence de la somme des séries.*
  Par exemple, le rayon de convergence des séries $\sum_{n\geq 0} z^n$ et $\sum_{n\geq 0} -z^n$ est 1. Pourtant leur somme est nulle donc de rayon de convergence $+\infty$.

- *Si $R_1 = R_2$ et si $a_n b_n = 0$ pour tout n (on dit alors que les* ***séries entières sont disjointes****), alors $R_s = R_1 = R_2$. Raisonnons par l'absurde, si $R_s > R_1 = R_2$, prenons $r \in]R_1;R_s[$, dans ces conditions, la suite $(|a_n|r^n)_n$ n'est pas majorée, tandis que $(|a_n + b_n|r^n)_n$ l'est. Or, $|a_n|r^n \leq (|a_n| + |b_n|)r^n = |a_n + b_n|r^n$, ce qui est contradictoire.*
  Ainsi, si les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_{2n}z^{2n}$ et $\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}z^{2n+1}$ ont le même rayon de convergence R, la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ admet R pour rayon de convergence.

Théorème 92.

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors S admet un développement limité à tout ordre en 0.

$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + o(z^n)$ au voisinage de $z = 0$

Preuve. *Pour tout $|z| < R$, on peut écrire :*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + z^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n} = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + z^n \varepsilon(z)$$

Or, $\varepsilon(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+n} z^k$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La fonction ε définit une fonction continue sur le disque ouvert de convergence et $\lim_{z\to 0} \varepsilon(z) = \varepsilon(0) = 0$. D'où, le résultat demandé. ∎

Remarque 18. *La réciproque est fausse en général. Il ne suffit pas d'avoir un développement limité à tout ordre pour conclure que S est développable en série entière. C'est ce que nous allons voir dans les sections qui suivent.*

Définition 93.

On appelle ***série dérivée*** *de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, la série $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.*

Proposition 94.

Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

Preuve. *Soient R et R' les rayons de la série et de sa dérivée. Si $r > R$, la suite $(|a_n|r^n)_n$ n'est pas bornée, donc la suite $((n+1)a_{n+1}r^n)_n$ non plus et donc $r \geq R'$. Il en résulte que $R' \leq R$.*
D'autre part, si $r < R$, choisissons $\rho \in]r;R[$. La suite $(|a_n|\rho^n)_n$ est bornée et $|(n+1)a_n|r^n = |a_n|\rho^n(n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ tend vers 0 donc $r \leq R'$. Il en résulte $R \leq R'$. ■

Corollaire 95.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit p un entier non nul.
La série entière $\sum_{n\geq 0}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}z_n = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}z_n$ est appelée ***série dérivée*** p**-ième** de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et a le même rayon de convergence que celle-ci*

Remarque 19. *Une série entière et ses séries dérivées successives, même si elles ont le même rayon de convergence, peuvent avoir des comportements différents aux points du bord du disque ouvert de convergence.*

Corollaire 96.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
Alors S est dérivable sur $]-R;R[$ ou sur $\mathbb{R}$ si $R = +\infty$ et, sur cet ensemble,

$$S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$

Corollaire 97.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
L'application S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ ou sur $\mathbb{R}$ si $R = +\infty$ et, sur cet ensemble,

$$\forall p > 0,\ S^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}t^n = \sum_{n=p}^{+\infty}\frac{n!}{(n-p)!}a_n t^{n-p}.$$

Remarque 20. *Les corollarys précédents signifient que la somme d'une série entière est infiniment dérivable sur son intervalle de convergence. De plus, on peut dériver, terme à terme et autant de fois que veut, la somme d'une série entière, sur son intervalle ouvert de convergence. En effet, dans le cas des séries entières, les conditions (en particulier la convergence uniforme de la dérivée) du théorème de dérivation des séries de fonctions sont vérifiées.*

Corollaire 98.

- *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R>0$ *et de somme* S.
  Pour tout entier n, *le coefficient* a_n *est égal à* $\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.
- *Soient* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et Soit* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* $R_1>0$ *et* $R_2>0$ *et de sommes respectives* S_1 *et* S_2.
  On suppose qu'il existe un réel strictement positif $\rho \leq \min(R_1, R_2)$ *tel que,* $\forall z \in B(0,\rho)$, $S_1(z)=S_2(z)$. *Alors ces deux séries sont identiques, c'est-à-dire* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Ici les séries entières considérées possèdent une variable réelle.

Théorème 99.

1. *Les séries entières* $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ *ont le même rayon de convergence* R.
2. *pour tout segment* $[\alpha;\beta]$ *de* $]-R;R[$, *on a :*
$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$$
3. *pour tout* $x \in]-R;R[$, *on a :*
$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Preuve.

1. $\dfrac{a_n}{(n+1)} \sim \dfrac{a_n}{n}$, *ce qui montre l'égalité des rayons.*
2. *la série* $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ *converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence* $]-R;R[$, *le théorème d'intégration terme à terme des séries fait le reste.*
3. *Un cas particulier de* **2**.

■

Exercice 100.

1. *Trouver le domaine de convergence et vérifier s'il y a convergence à ses extrémités pour les séries entières suivantes :*
   (a) $\sum_{n\geq 0} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$.
   (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}$.
   (c) $\sum_{n\geq 0} \alpha^n z^{2n+1}$, *avec* $\alpha \in \mathbb{C}$ *une constante.*
2. *Rayon de convergence R et somme S de la série entière :*
   (a) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$.
   (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{3n+2}$.
   (c) $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2-1} x^n$.

Remarque 21. • *La somme d'une série entière est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque ouvert de convergence. Réciproquement, peut-on considérer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est la somme d'une série entière ?*

Définition 101.

- *Une fonction f d'une variable complexe est dite* ***développable en série entière*** *s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon R strictement positif, tel que :*

$$\forall |z| < R, f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

- *Une fonction f d'une variable réelle est dite* ***développable en série entière*** *s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon R strictement positif, tel que :*

$$\forall x \in]-R;R[, f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

- *On peut aussi définir un développement en série entière au voisinage de z_0, en posant :*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$$

- *Ce développement, quand il existe, est unique puisque $a_n = \dfrac{f^{(n)(z_0)}}{n!}$.*

Exemple 2.

- *La fonction $x \mapsto e^x$ est développable en série entière en 0 :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Plus généralement :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = e^{x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

- *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière en 0 :*

$$\forall x \in]-1;1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

- *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière en 0 :*

$$\forall x \in]-1;1[,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Théorème 102.

(Propriétés : Condition nécessaire)

1. *Une condition nécessaire pour que f soit développable en série entière est que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de l'origine. Et dans ce cas, il existe un réel $R > 0$ tel que, sur $]-R, R[$,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

2. *La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelé **série de MacLaurin** (ou **série de Taylor**) de f en $x = 0$.*

Preuve. *Il suffit d'appliquer directement les corollarys 96, 97 et 98.* ■

Remarque 22.
- *Même si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine, et même si la série de MacLaurin de f a un rayon de convergence strictement positif, on ne peut pas affirmer que f est développable en série entière en 0.*

- *Exemple : $f :\mapsto f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$*

Théorème 103.

Propriété : Condition nécessaire et suffisante
Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de l'origine.
*f est développable en série entière **si et seulement si***

$$\exists r > 0,\ \forall x \in]-r, r[,\ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{x^{n+1}}{n!} R_n(x)$$

où $R_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\,dt$ et $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

Preuve. *Ce n'est que l'application de la formule de Taylor avec reste intégral en effectuant le changement de variable $t = xu$ (pour $x \neq 0$). En effet on a*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{x^{n+1}}{n!} R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\,dt$.
La fonction f est développable en série entière si et seulement si la série de MacLaurin de f converge vers f sur un intervalle $]-r; r[$, i.e. si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. ■

Théorème 104.

Propriété : Condition suffisante Soit f est une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de l'origine, alors
$(\exists r > 0, \exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-r, r[, |f^{(k)}(x)| \leq M) \Rightarrow f$ *est développable en série entière sur* $]-r; r[$.

Preuve. *En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \frac{x^{n+1}}{n!} R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\, dt$.
pour tout $x \in]-r; r[$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^{n+1}}{n!} R_n(x)\right| &\leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |f^{(n+1)}(tx)|\, dt \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n M\, dt \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{n!} \frac{M}{n+1} \end{aligned}$$

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. *D'où le résultat.* ■

Corollaire 105.

Soient f et g deux fonctions développables en série entière en 0 de développement $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} b_n z^n$, *alors*

1. *Pour tous scalaires α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est développable en série entière en 0. Le développement est alors* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$.
2. *La fonction fg est développable en série entière en 0. Le développement est alors le produit de Cauchy des séries* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} b_n z^n$.

Corollaire 106.

Soient f et g deux fonctions développables en série entière en 0 de développement $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} b_n z^n$. Si $f(0)=0$, alors alors gof est développable en série entière en 0. Le développement est alors obtenu en substituant la série $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ dans la série $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} b_n z^n$.

Proposition 107.

Si f est développable en série entière en 0, et si $f(0)\neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est développable en série entière en 0.

Proposition 108.

Soit f une fonction développable en série entière en 0, alors

- *Les dérivées successives de f sont développables en série entière en 0. Le développement de $f^{(p)}$ s'obtient en dérivant terme à terme p fois celui de f.*
- *Toute primitive F de f est développable en série entière en 0. Le développement de F s'obtient en intégrant terme à terme celui de f. Le terme constant étant la valeur de F en 0.*

Remarque 23.
- *Méthode directe : en utilisant la formule de Taylor ou Maclaurin.*
- *Par dérivation et intégration : si l'on sait développer une fonction primitive (resp. la fonction dérivée).*
- *Cas des fractions rationnelles : décomposition en éléments simples, puis sommation des séries entières obtenues.*
- *Si f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ développable en série entière sur $]-r;r[$ par $f(x)=\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n$, alors on peut définir une fonction $\widetilde{f}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sur $B(0;r)$ en posant $\widetilde{f}=\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$.*

4.3 Fonctions développables en série entière : Développements usuels

- ***Fonction Exponentielle :***

- $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $(R = +\infty)$
- $\forall a > 0$, $a^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln^n(a)}{n!} x^n$, $(R = +\infty)$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $(R = +\infty)$

• ***Fonctions trigonométriques directes :***

- $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(R = +\infty)$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(R = +\infty)$
- $ch\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(R = +\infty)$
- $sh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(R = +\infty)$

• ***Développement de*** $(1+x)^\alpha$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, $(R = 1)$
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$, $(R = 1)$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $(R = 1)$

• ***Logarithme népérien :***

- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $(R = 1)$
- $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $(R = 1)$

• ***Fonctions trigonométriques réciproques :***

- $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(R = 1)$
- $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\cdots.(2n+1)}{2.4\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(R = 1)$

Chapitre 5

Devoirs surveillés–Exercices et corrigés

5.1 Devoirs surveillés

5.2 Sujet

Exercice 1 : *Soit D le domaine de* $\mathbb{R}^2$ *tel que*

$$D = \left\{(x,y) \in ([0,+\infty[)^2 \mid x+y \leq 1\right\}.$$

1. *Tracer* D .
2. *Montrer que le changement de variable* $\phi : (u,v) \in \Delta \mapsto (x = u, y = (1-u)v) \in \overset{\circ}{D}$ *où* Δ *est un domaine à déterminer, est un* C^1*–difféomorphisme.*
3. *Calculer l'intégrale double :* $I = \displaystyle\iint_D \frac{xy}{(1-x)^2}\,dxdy.$

Exercice 2 :
On considère la fonction donnée par:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\cos(xt)-1}{t^2}\right) e^{-t}\,dt.$$

1. *Donner le domaine de définition* D *de* F.
2. *Montrer que* $\left|\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\right| \leq 1/2$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$.
3. *Montrer que* F *est continue sur* D.
4. *Vérifier que* $|\sin(x)| \leq |x|$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, puis montrer que* F *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$.
5. *Montrer que* $\quad F''(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
6. *En déduire* F' *et par suite* F.

Exercice 3 :
On considère la fonction donnée par:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\,dt.$$

1. *Donner le domaine de définition de* F.
2. *Montrer que* F *est continue sur* $\mathbb{R}$.
3. *Montrer que* F *est de classe* C^1 *sur* $]0,+\infty[$.
4. *Montrer que* $\quad F'(x) = \dfrac{\ln(|x|)}{x^2-1}$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}^* \backslash \{-1,1\}$.
5. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt.$

5.3 Correction

Exercice 1 : *On a D le domaine de $\mathbb{R}^2$ tel que*

$$D = \Big\{(x,y) \in ([0,+\infty[)^2 \mid x+y \leq 1\Big\}.$$

1. *Facile.*

2. *On peut écrire D comme suit*

$$D = \Big\{(x,y) \in (\mathbb{R})^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad et \quad 0 \leq y \leq 1-x\Big\}.$$

   Donc $\phi(u,v) \in D$ si seulement si $(u,v) \in [0,1]\times[0,1]$. ϕ transforme donc le trinagle en carré.
   On a ϕ est continue injective et le Jacobien

$$J_\phi = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1-u \end{pmatrix}\right| = 1-u \neq 0$$

   Par suite ϕ est C^1-difféomorphisme.

3. *On a par application du théorème de Fubini sur les rectangles*

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{xy}{(1-x)^2}\,dxdy \\ &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} = \int_0^1\int_0^1 \frac{uv}{1-u}(1-u)dudv = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2 :
Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos(xt)-1}{t^2}\right)e^{-t}\,dt.$$

1. *Convergence de l'intégrale :*
   Au voisinage de 0: On a pour tout x

$$\cos(tx) = 1 + \frac{x^2t^2}{2} + x^2 o(t^2),$$

   donc $\cos(tx)-1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2t^2}{2}$ et donc $\frac{\cos(xt)-1}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Comme $\int_0^1 \frac{x^2}{2}e^{-t}dt$ converge pour tout x alors F converge au voisinage de 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Au voisinage de $+\infty$: On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\cos(xt)-1}{t^2}\right)e^{-t}\Big| \leq \frac{2e^{-t}}{t^2} := f(t).$$

   Or $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$ et par suite $f(t) = o(\frac{1}{t^2})$ ce qui implique que $\int_1^{+\infty}\left(\frac{\cos(xt)-1}{t^2}\right)e^{-t}\,dt$ converge et par conséquent le domaine de définition F est $D = \mathbb{R}$.

2. *Evident.*

3. *On applique le théorème de continuité (locale)pour les intégrales dépendants d'un paramètre. Soit $a > 0$, on a pour $x \in [-a, a]$*

$$|f(t,x)| = \Big|\frac{\cos(xt)-1}{t^2}\Big) e^{-t}\Big| \leq \frac{x^2 e^{-t}}{2} \leq \frac{a^2 e^{-t}}{2} := \phi(t).$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)dt$ *converge et F est continue sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$. Par conséquent F est continue sur D.*

4. *On applique le théorème de dérivabilité (locale) pour les intégrales dépendants d'un paramètre. Soit $a > 0$, on a pour $x \in [-a, a]$*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big| = -t\frac{\sin(xt)e^{-t}}{t^2} \leq ae^{-t} := \phi(t)$$

De plus on aussi

$$\Big|\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\Big| = -t\frac{\cos(xt)e^{-t}}{t} \leq e^{-t} := \psi(t)$$

Les intégrales de ϕ et ψ convergent et par suite F est de classe C^2 sur D.

5. *Le résultat s'obtient par une intégration par parties. On trouve que*

$$(1+x^2)F''(x) = -1,$$

6. *On déduit de la question précédente que $F'(x) = -\arctan(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. Or $F'(0) = 0$, donc $c = 0$. Encore par une intégration par parties, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$F(x) = x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Exercice 3 :

1. *Questions 1 et2 :*
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \to f(x,t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \to f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin,

$$|f(x,t)| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)},$$

   qui est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on en conclut que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. *La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et ona pour tout $x \in [a, +\infty[$, avec $a > 0$*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big| = \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)} \leq \frac{t}{(t^2+a^2)(1+t^2)} := \phi(t)$$

   Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)dt$ converge et donc F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$, ce qui donne que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3. *On calcule $F'(x)$, on a*

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}dt \\ &= \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\Big(\frac{t}{(1+t^2)} - \frac{t}{(x^2+t^2)}\Big)dt \\ &= \frac{1}{2(x^2-1)}\ln(x^2), \end{aligned}$$

ce qui donne que $\quad F'(x) = \dfrac{\ln(|x|)}{x^2-1}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^*\backslash\{-1,1\}$.

4. *On a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = F'(1) = \lim_{x\to 1, x>1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}.$$

5.4 Sujet

Exercice 1 : *On considère la fonction F définie par:* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt.$

1. *Montrer que le domaine de définition de F est* $[0,+\infty[$.
2. *Montrer que F est continue sur* $[0,+\infty[$.
3. *Montrer que F est de calsse* C^2 *sur* $]0,+\infty[$.
4. *Montrer que* $\quad F''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt$, *pour tout* $x>0$.
5. *Prouver que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt = \frac{x}{x^2+4}$ *pour tout* $x>0$.
6. *Vérifier que* $|F'(x)| \le \dfrac{1}{x}$, *pour tout* $x>0$. *En déduire que* $F'(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x) - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+4)$, *pour tout* $x>0$.
7. *A l'aide d'une intégration par parties, déduire que* $F(x) = \dfrac{1}{4}x\ln(\dfrac{x^2}{x^2+4}) - \arctan(\dfrac{x}{2}) + \dfrac{\pi}{2}$.
8. *En déduire la valeur de* $J = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$.
9. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que* $J = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 : *Soit la fonction f définie par :* $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{(1+x^2)^2}$.

1. *On pose* $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. *Vérifier que I converge et que* $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ixe^{-ix}}{(1+x^2)^2}dx$.

   Soit Γ^+ *le contour, orienté dans le sens trigonométrique, formé par* $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\ Im(z) \le 0\}$ *et le segment* $[-R,R]$, $R>1$. *On pose* $g(z) = \dfrac{ize^{-iz}}{(1+z^2)^2}$

2. *Etudier les singularités de g et donner les résidus correspondants.*

3. *Trouver une majoration de* $\left|\int_{C_{R^+}} g(z)dz\right|$. *En déduire que* $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_{R^+}} g(z)dz$.

4. *Calculer la valeur de I par la méthode des résidus.*

5.5 Correction

Exercice 1 :

1. *Pour* $x \geq 0$, *la fonction* $g(x,t) = e^{-xt}\dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ *est localement intégrable sur* $]0,1[$ *et prolongeable par continuité en 0 par 1: le seul problème d'intégration est donc en* $+\infty$. *Mais* $|g(x,t)| \leq \dfrac{1}{t^2}$ *pour tout* $t \geq 1$ *et* $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}dt$ *est une intégrale de Riemann convergente. Donc par le théorème de comparaison des intégrales impropres positives, on en déduit que F existe sur* $[0,+\infty[$.

2. *La fonction* $g(x,t)$ *est continue sur* $[0,+\infty[$ *et* $|g(x,t)| \leq \phi_t := \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ *pour tout* $(x,t) \in [0,+\infty[^2$. *Comme* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\phi_t dt < 1$ *(en 0, prolongeable par continuité et en 1 majorée par* $\dfrac{1}{t^2}$*), d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant déun paramètre, F est continue sur* $[0,+\infty[$.

3. *Il est clair que* $g(x,t)$ *est de classe* C^2 *sur* $]0,+\infty[^2$. *De plus,* $\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial x} = -e^{-xt}\dfrac{\sin^2 t}{t}$ *et pour tout* $a > 0$,
$$\left|\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right| \leq \phi_t := e^{-at}.$$
Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\phi_t dt < 1$, *d'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, F est de classe* C^1 *sur* $[a,+\infty[$, *donc sur* $]0,+\infty[$. *De la même manière, on trouve que F est de classe* C^2 *sur* $[a,+\infty[$, *donc sur* $]0,+\infty[$.

4. *On a*
$$\begin{aligned} F''(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin^2(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-\cos(2t))\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt \end{aligned}$$
car ces deux intégrales sont absolument convergentes sur $]0,+\infty[$ *et on peut donc séparer la somme. Ainsi on obtient bien que*
$$F''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt.$$

5. *Soit* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt$. *Alors par intégration par parties, pour* $x > 0$, *on déduit ainsi que*
$$I = \frac{x}{x^2+4}.$$

6. *Pour $x > 0$, on a*
$$|F'(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt \leq \frac{1}{x}.$$
Donc $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = 0$. *Comme* $F''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+4}$, *on déduit que*
$$F'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + c, \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}.$$
Mais $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = 0$, *donc* $c = 0$ *et*
$$F'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4).$$

7. *Pour $x > 0$, on a*
$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt \leq \frac{1}{x}.$$
Donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. *A l'aide d'une intégration par parties, on déduit que*
$$F(x) = \frac{1}{4}x\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}.$$

8. *Pour finir, on utilise la continuité de F en 0 et donc*
$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2},$$
grâce à l'expression de la question précédente.

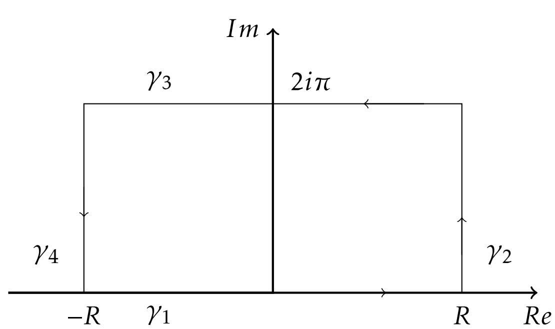
9. *A l'aide d'une intégration par parties et un changement de variable, on obtient que*
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

5.6 Sujet

Exercice 1 : *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :* $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}, \quad 0 < \lambda < 1.$

1. *Montrer que* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *est convergente.*

Dans la suite, on Considère la fonction complexe définie par $f(z) = \frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}$ *et* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ *le contour fermé suivant :*



2. *Quels sont les pôles de f. En utilisant un déveleppement de e^z au voisinage de $i\pi$, donner le résidu de f au point $z_0 = i\pi$.*

3. *Montrer que* $\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq 2\pi \dfrac{e^{\lambda R}}{e^R - 1}$. *En déduire* $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

4. *Montrer que* $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_4} f(z)dz = 0$.

5. *Déduire que* $I = \dfrac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$.

Exercice 2 : *Calculer par la méthode des résidus l'intégrale suivante :*

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[2+\cos(\theta)]^3}.$$

Exercice 3: *Calculer l'intégrale curviligne* $\int_\gamma zdx + xdy + ydz$, *où γ est le cercle défini par* $x+z=1$ *et* $x^2+y^2+z^2=1$.

5.7 Correction

Exercice 1 : *Commençons tout d'abord par une remarque. On a* $\dfrac{e^{\lambda x}}{1+e^x} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. *Or, pour* $\lambda \geq 1$ *la limite de* $\dfrac{e^{\lambda x}}{1+e^x}$ *en* $+\infty$ *n'est pas zéro. De même pour* $\lambda \leq 0$, *la limite de* $\dfrac{e^{\lambda x}}{1+e^x}$ *en* $-\infty$ *n'est pas zéro. Donc l'intègrale n'est pas définie pour* $\lambda \leq 0$ *et* $\lambda \geq 1$

1. *Convergence de l'intégrale :*
$$\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} \leq e^{(\lambda-1)x},$$
qui est intégrable sur $[0,+\infty[$ *si* $\lambda < 1$.
$$\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} \leq e^{\lambda x},$$
qui est intégrable sur $]-\infty, 0]$ *si* $\lambda > 0$. *Donc* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *est convergente pour* $0 < \lambda < 1$.

2. *Les pôles de f sont donnés par $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = -1$. C'est à dire $z = (2k+1)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Le seul pôle de f contenu dans le contour est $z_0 = i\pi$. Calculons le résidu de f au point z_0 qui est un pôle simple.*
$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = -e^{\lambda i\pi}$$
où on a utilisé le développement suivant: $e^z = e^{i\pi} + (z-i\pi)e^{i\pi} + \dfrac{1}{2}(z-i\pi)^2 e^{i\pi} + \dfrac{1}{3!}(z-i\pi)^3 e^{i\pi} + \ldots$

3. *Montrons que* $\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq 2\pi\frac{e^{\lambda R}}{e^R-1}$. *Sur* γ_2*, on pose* $z = R+it$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| &= \left|i\int_0^{2\pi}\frac{e^{\lambda(R+it)}}{1+e^{R+it}}dt\right| \\ &\leq \int_0^{2\pi}\frac{e^{\lambda R}}{e^R-1} = 2\pi\frac{e^{\lambda R}}{e^R-1}\end{aligned}$$

On fait tendre R vers $+\infty$*, on voit que*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

De même en posant $z = -R+it$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| &= \left|i\int_0^{2\pi}\frac{e^{\lambda(-R+it)}}{1+e^{-R+it}}dt\right| \\ &\leq \int_0^{2\pi}\frac{e^{-\lambda R}}{e^{-R}-1} = 2\pi\frac{e^{-\lambda R}}{e^{-R}-1}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_4} f(z)dz = 0.$$

4. *D'après le théorème de résidu, on a*

$$\sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i} f(z)dz = 2i\pi Res(f,z_0) = -2i\pi e^{\lambda i\pi}.$$

Comme

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} f(z)dz &= \int_R^{-R}\frac{e^{\lambda(x+2i\pi)}}{1+e^{x+2i\pi}}dx \\ &= -e^{\lambda 2i\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}dx\end{aligned}$$

D'où, on fait tendre R vers ∞*, on obtient*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \frac{2i\pi e^{i\lambda\pi}}{e^{2i\lambda\pi}-1} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}.\end{aligned}$$

Exercice 3 : *Toute la difficulté consiste à paramétrer le cercle. On introduit* $z = 1-x$ *dans la seconde équation. On obtient, après simplifications:*

$$4(x-\frac{1}{2})^2 + 2y^2 = 1.$$

Le cercle se paramétrise alors en :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\theta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta) \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\theta) \end{cases}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$. On obtient alors

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma z dx + x dy + y dz \\ &= -\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\theta))\frac{1}{2}\sin(\theta)d\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\theta))\cos(\theta)d\theta + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)d\theta \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

5.8 Exercices

Exercice 1. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.

1. Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F satisfait l'équation différentielle $2F'(x) + xF(x) = 0$ et en déduire la valeur de F.

Exercice 2. On considère la fonction Gamma définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

1. Donner le domaine de définition D de F.
   On pose
   $$F_1(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt \text{ et } F_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$
2. Montrer que F_1 et F_2 sont continues sur D. En déduire de F est continue sur D.

Exercice 3. On considère la fonction donnée par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+\sin(t)}dt$.

1. Donner le domaine de définition D de F.
2. Montrer que F est continue sur D.
3. Calculer, par deux méthodes, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Exercice 4. On considère la fonction donnée par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}dt$.

1. Montrer que F est définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \ln(1+t)dt$.

1. Montrer que F est définie sur $]-2,+\infty[$.
2. Montrer que F est continue sur $]-2,+\infty[$.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $]-2,+\infty[$.

Exercice 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
3. En posant le changement de variable $u = \dfrac{x}{t}$, former une équation différentielle vérifiée par F sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F(0)e^{-2|x|}$.

Exercice 7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+tx}dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer F.

Exercice 8. On considère la fonction donnée par:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\cos(xt)\,dt.$$

1. Donner le domaine de définition D de F.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur D.
3. Calculer F.

Exercice 9. Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$.

1. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que G est de classe C^1.
3. Justifier et calculer $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt$
4. En déduire la valeur de G.

Exercice 10. On considère la fonction réelle de la variable réelle : $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^{x-1}\ln(t)}dt$.

On pose $f(t,x) = \dfrac{t-1}{t^{x-1}\ln(t)}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times]1,+\infty[$.

1. Trouver un équivalent de f au voisinage de 1 et au voisinage de $+\infty$.

2. Montrer que le domaine de définition de F est $D =]3, +\infty[$.

3. Soit $a > 3$. Démontrer que F est continue sur $[a, +\infty[$. En déduire que F est continue sur D.

4. Démontrer que F est de C^1 sur D.

5. Pour $x \in D$, donner l'expression de F'. Déduire que pour tout $x \in D$
$$F(x) = \ln(x-2) - \ln(x-3) + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11. On considère la fonction F définie par: $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $[0, +\infty[$.

2. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer que F est de calsse C^2 sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer que $\quad F''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t)\, dt$, pour tout $x > 0$.

5. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t)\, dt = \frac{x}{x^2+4}$ pour tout $x > 0$.

6. Vérifier que $|F'(x)| \leq \dfrac{1}{x}$, pour tout $x > 0$. En déduire que $F'(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x) - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+4)$, pour tout $x > 0$.

7. A l'aide d'une intégration par parties, déduire que $F(x) = \dfrac{1}{4} x \ln(\dfrac{x^2}{x^2+4}) - \arctan(\dfrac{x}{2}) + \dfrac{\pi}{2}$.

8. En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$.

9. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 12. Calculer l'intégrale double suivante :
$$J = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dx dy.$$
où
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1, \ x^2 + y^2 \geq 1 \right\}.$$

Exercice 13. Calculer l'intégrale double suivante :
$$J = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx dy.$$
où
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y \right\}.$$

Exercice 14. Calculer les deux intégrales doubles suivantes:

$$I = \iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}dxdy, \qquad J = \iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1\}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 15. Soit l'ensemble suivante :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :, x^2+y^2-2y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

1. Tracer D.
2. Montrer que D est une partie quarrable.
3. Calculer l'intégrale double suivante :

$$J = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Exercice 16. Soit a un réel strictement positif, on définit les deux ensembles suivants :

$$K_a = [0,a] \times [0,a], \qquad D_a = \left\{(x,y) \in ([0,+\infty[)^2 \ :, x^2+y^2 \leq a^2\right\}.$$

L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale de Gauss suivante : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

1. Montrer que : $I = \displaystyle\lim_{a\to+\infty} \iint_{K_a} e^{-x^2-y^2}dxdy$. Calculer $\displaystyle\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy$.
2. En remarquant que $D_a \subset K_a \subset D_{a\sqrt{2}}$, calculer I.

Exercice 17. Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

1. Soit D le pavé $[0,1]\times[0,1]$. Montrer que $I = \displaystyle\iint_D \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}$.
2. En intervertissant les rôles de x et y, montrer que

$$2I = \iint_D \frac{(x+y)dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

3. Déduire la valeur de I.

Exercice 18. Calculer l'intégrale double suivante :

$$I = \iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2 \geq 1,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 19. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ |x|+|y| \leq 2\right\}.$$

1. Tracer D et prouver que c'est une partie compacte quarrable de $\mathbb{R}^2$.
2. Claculer $J = \iint_D dxdy$.
3. Calculer $I = \iint_D \frac{dxdy}{(|x|+|y|)^2+4}$.

Exercice 20. Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $I = \iint_D (yx^2+y^3)dxdy$, avec $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; \frac{1}{2} \le x^2+y^2 \le 3,\ y \ge 0\right\}$.
2. $J = \iint_D \frac{dxdy}{2+e^{-x^2-4y^2}}$, avec $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+4y^2 \le 16,\ \ x\ge 0\ \ y \ge 0\right\}$.
3. $K = \iint_D (x+y)^2dxdy$, avec $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; y\ge 0,\ x^2+y^2-x\le 0,\ x^2+y^2-y\ge 0\right\}$.

Exercice 21. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$D = \left\{(x,y)\in(]0,+\infty[)^2 \;:\; x\le y\le 2x \text{ et } \frac{1}{x}\le y\le\frac{2}{x}\right\}.$$

1. Tracer D .
2. Montrer que le changement de variable $\phi : (u,v)\in\Delta \mapsto (x=\sqrt{\frac{v}{u}}, y=\sqrt{uv})\in D$ où Δ est un domaine à déterminer, est un C^1–difféomorphisme.
3. Calculer l'aire de D.

Exercice 22. 1. Calculer $A = \iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2)((1+y^2)}$, où $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\le y\le x\le 1\}$.

2. Démontrer la convergence des intégrales

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2\cos^2(\theta))}{2\cos(2\theta)}d\theta, \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2\sin^2(\theta))}{2\cos(2\theta)}d\theta, \quad D = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}dt.$$

3. Montrer que $A = B$ et calculer $B+C$ et $B-C$ en fonction de D. En déduire les valeurs de C et D.

Exercice 23. 1. Calculer le volume d'une sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rayon R.

2. Calculer les deux intégrales triples suivantes:

$$I = \iiint_D \cos(x)dxdydz, \qquad J = \iiint_\Delta \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz,$$

où $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2<1\}$ et $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2\le a^2,\ 0<z<a\}$.

Exercice 24. Calculer les deux intégrales triples suivantes:

$$I = \iiint_D (x+y)zdxdydz, \qquad J = \iiint_D \cos(x+y+2z+1)dxdydz,$$

où $D = \{(x,y,z)\in([0,+\infty[)^3 \;:\; x+y+2z\le 2\}$.

DS

Exercice 25. On considère la fonction réelle de la variable réelle : $x \mapsto F(x) = \int_0^1 \frac{t^2-1}{\ln(t^2)} t^x dt.$

1. Trouver le domaine de définition D de F.
2. Démontrer que F est continue sur D.
3. Démontrer que F est de C^1 sur D.

Exercice 26. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)^2} dx.$

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
   Soit f la fonction complexe définie par
2. Soit la fonction complexe

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}(1+z^2)^2}, \quad \text{où} \quad \sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\,arg(z)}{2}}, \quad \text{avec} \quad 0 \le arg(z) < 2\pi.$$

   On considère γ^+ le contour formé par le segment $[-R, -r]$, le demi-cercle supérieur C_{r^-} de centre 0 et de rayon r, le segment $[r, R]$ et le demi-cercle supérieur C_{R^+} de centre 0 et de rayon $R > 1$.

3. En utilisant un déveleppement en série de Laurent, vérifier que $z_0 = i$ est un pôle d'ordre 2 et donner le résidu de f au point z_0.
4. Trouver une majoration de $\left| \int_{C_{R^+}} f(z)dz \right|$ en fonction de R. En déduire $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_{R^+}} f(z)dz$.
5. Donner $\lim_{r \to 0} \int_{C_{r^-}} f(z)dz$.
6. Calculer I.

Exercice 27. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \int_0^1 t^x \ln(1+t)dt.$$

1. Trouver le domaine de définition D de F.
2. Montrer que F est continue sur D.
3. Montrer que F est de classe D.
4. Calculer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Exercice 28. Soit f la fonction complexe définie par $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

1. En utilisant un déveleppement en série de Laurent, vérifier que $z_0 = i$ est un pôle d'ordre 2 et donner le résidu de f au point z_0.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$ par la méthode des résidus.

Exercice 29. Par la méthode des résidus calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{2+\cos(\theta)} d\theta.$$

5.9 Bibliographie

1. LAADJ Toufik, Notes de Cours du module Analyse Complexe, USTHB, 2016.
2. Jean Paul Truc, Intégrale multiples, E.P.A, 2012.