El Hassan Essaky
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département Maths-Info

Polycopié D'analyse IV

SMA Semestre 3
First draft

Contents

Chapitre 1

Intégrales généralisées

L'intégrale de Riemann est définie pour des fonctions bornées et sur des segments. On se propose de généraliser cette notion au cas des fonctions non bornées définies sur des intervalles qui ne sont pas nécessairement des segments.

Soit alors f une fonction numérique continue sur un intervalle de bornes a et b, non nécessairement fermé et non nécessairement borné. On se propose d'étudier, quand on peut donner un sens à l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Lorsque cela sera possible on parlera alors d'intégrale généralisée.

1.1 Définition des intégrales convergentes

Définition 1.

- Soient $J = [a, b[$ et f une fonction continue sur J. Si la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers b. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge. Lorsque F a une limite (finie ou non) en a on note $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$.
- De la même façon, si $J =]a, b]$ et f une fonction continue sur J. Si la fonction F définie par $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers a. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge.

Remarque 1.

- *Si f est continue sur $[a, b[$ et si G est une primitive de f, on a $\int_a^x f(t)dt = G(x)-G(a)$, il en résulte que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si G possède une limite finie en b. On notera lorsqu'il en est ainsi $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} G(x) - G(a) = [G(x)]_a^b$.*
- *Nous dirons que deux intégrales sont de même nature, si elles sont toutes deux divergentes ou toutes deux convergentes.*

Exemple 1.

- *On voudrait étudier la convergence de l'intégrale suivante : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$. Le seul problème est la borne $b = +\infty$ car la fonction $t \to \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. On a*

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x),$$

et par suite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

- *On voudrait étudier la convergence de l'intégrale suivante :* $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$. *Le seul problème est la borne* $b=+\infty$ *car la fonction* $t \to e^{-t}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$. *On a*

$$\int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = 1-e^{-x},$$

et par suite

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt = 1$$

Donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ *converge et* $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$. *Cette exemple montre que l'aire sous la courbe de la fonction* $t\to e^{-t}$ *sur tout* $[0,+\infty[$ *est finie, même si la surface n'est pas bornée.*

- *Etude de la convergence de l'intégrale :* $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$. *Le seul problème est la borne* 0 *car la fonction* $t\to \frac{1}{t}$ *est continue sur* $]0,1]$. *On a*

$$\int_x^1 \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_x^1 = -\ln(x),$$

et par suite

$$\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{t}dt = +\infty,$$

et l'intégrale diverge.

Remarque 2. *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,+\infty[$. *Si* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *existe, finie ou infinie, et est non nulle alors* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge. En effet, supposons par exemple que la limite* $l>0$. *Alors, pour* A *assez grand, on aura pour* $t\geq A$

$$f(t)\geq \frac{l}{2},$$

ce qui donne le résultat par intégration. De même pour la limite infinie.

Dans les énoncés suivants nous nous plaçons sur un intervalle $J=[a,b[$. Le cas où $J=]a,b]$ est en tout point analogue. Il est très rare dans les faits que l'on sache calculer explicitement une intégrale généralisée. Le plus souvent, on est déjà bien content quand on sait déterminer sa nature, c'est-à-dire démontrer qu'elle est convergente ou divergente. On dispose pour cela de divers critères. On présente ci-dessous les plus usuels.

Comme pour les intégrales de Riemann, l'intégrale généralisée est linéaire, monotone, satisfaisant la relation de Chasles,...

Proposition 2.

(Linéarité de l'intégrale) Soit f et g des fonctions continues sur $J=[a,b[$, et λ un nombre réel non nul. Si les intégrales de f et de g convergent, il en est de même de celle de $f+g$ et

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Si une des deux intégrales diverge, l'intégrale de $f+g$ diverge. L'intégrale de λf converge si et seulement l'intégrale de f converge et alors $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$.

Idem pour la monotonie de l'intégrale.

Proposition 3.

(Monotonie de l'intégrale) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ telles que $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ soient convergentes.

$$\text{Si } f \leq g \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive est positive, i.e.

$$\text{Si } f \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Preuve. Si $f \leq g$, on a pour $x < b$

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt.$$

Comme les deux intégrales sont convergentes alors on a le résultat. ■

Proposition 4.

(Relation de chasles "généralisée") Soit $a < c < b$. Si les intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ convergent, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Si l'une des deux premières intégrales diverge, la dernière diverge.

Remarque 3. *Comme pour une intégrale de Riemann, nous poserons, si $a > b$*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

lorsque cette dernière intégrale converge.

Proposition 5.

(Formule d'intégration par parties) Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b[$. Alors, si l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ converge, et si uv possède une limite en b, l'intégrale $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ converge et

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \lim_{x\to b} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Preuve. On utilise la formule d'intégration par parties sur un segment et on passe après à la limite. On a alors su segment,

$$\int_a^t u'(x)v(x)dx = u(t)v(t) - u(a)v(a) - \int_a^t u(x)v'(x)dx.$$

On fait tendre t vers b, on a la résultat. ∎

Proposition 6.

(Formule de changement de variable) Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. Soit φ une application strictement monotone de classe C^1 sur $[\alpha,\beta[$. Posons $b = \lim_{x\to\beta}\varphi(x)$, et $a = \varphi(\alpha)$.

Alors les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$ sont de même nature, et si elles convergent, ou si elles ont une limite infinie, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$$

Preuve. On utilise le théorème de changement de variable pour les intégrales de Riemann, on a, si $\alpha \le v < \beta$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(v)} f(x)dx = \int_\alpha^v f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$$

Posons, si u appartient à $[a,b[$,

$$F(u) = \int_{\varphi(\alpha)}^{u} f(x)dx,$$

et, si v appartient à $[\alpha,\beta[$,

$$G(v) = \int_\alpha^v f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$$

Alors, si v appartient à $[\alpha,\beta[$,

$$F\circ\varphi(v) = G(v).$$

Si $\int_a^b f(x)dx$ converge, alors $F(u)$ possède une limite finie l lorsque u tend vers b, et donc, en utilisant le théorème sur les limites de composées, G possède la même limite lorsque v tend vers β. Alors, $\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$ converge et on a bien égalité. Cela reste vrai si les limites sont infinies. ∎

1.2 Intégrale généralisée d'une fonction positive

Théorème 7.

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ et positive. Si l'on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, La fonction F est croissante sur $[a,b[$, et l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si F est majorée. De plus, pour tout x de $[a,b[$

$$F(x) \le \int_a^b f(t)dt.$$

Preuve. Si f est positive, on a, si $a \leq u < v < b$,

$$F(v) - F(u) = \int_u^v f(t)dt \geq 0,$$

et la fonction F est donc croissante. Elle admet une limite finie ou non en b. Si la limite est finie l'intégrale converge, et l'on a, pour tout x de $[a, b[$,

$$F(x) \leq \int_a^b f(t)dt,$$

sinon elle diverge. Dans ce cas, dire que l'intégrale converge revient à dire que la fonction F est bornée.

Théorème 8.

(Principe de comparaison)
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, positives telles que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b[$. Alors si l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$ converge, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge, l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

Preuve. Si l'on a $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour $a \leq x < b$, posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. On a alors, si $a \leq x < b$, l'inégalité $F(x) \leq G(x)$. Si $\int_a^b g(x)dx$ converge et l'on a, si $a \leq x < b$, $F(x) \leq G(x) \leq \int_a^b g(x)dx$. La fonction F est croissante majorée. Alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge.
L'autre assertion est la contraposée de celle que l'on vient de démontrer. ■

Théorème 9.

Soient f et g deux applications définies sur $[a, b[$, à valeurs positives, continues sur $[a, b[$, telles que

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

et la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de b.

1. Si $l \neq 0$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nautue.
2. Si $l = 0$ (autrement dit si $f \underset{b}{=} o(g)$) alors la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ implique la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.

Preuve. Puisque les fonctions f et g sont positives sur $[a, b[$ alors $l \geq 0$.
Supposons que $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$, c'est à dire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0\ \forall x \in [a, b[\ (0 < b - x \leq \eta \Longrightarrow |\frac{f(x)}{g(x)} - l| \leq \varepsilon).$$

Prenons $\varepsilon = \frac{l}{2}$, $\exists \eta_l > 0 : \forall x \in [a,b[\cap[b-\eta_l, b[$ on ait

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - l| \leq \varepsilon.$$

Cela implique $\forall x \in [\min(a, b-\eta_l), b[$ on ait

$$\frac{l}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3l}{2}g(x).$$

D'après le prinicipe de comparaison on résultat.
si $l = 0$, $\exists \eta_l > 0 : \forall x \in [a,b[\cap[b-\eta_l, b[$ on ait

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Le prinicipe de comparaison donne résultat. ■

Exemple 1. *On considère* $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^3+x^2+1}dx$. *On a la fonction* $x \to f(x) = \frac{e^{-x}}{x^3+x^2+1}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$, *donc le seul souci est en* $+\infty$. *On considère donc* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^3+x^2+1}dx$ *On a* $\frac{e^{-x}}{x^3+x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x^3}$. *Or* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^3}dx$ *est convergente puisque*

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \frac{e^{-x}}{x^3} = 0,$$

et donc $f \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{x^3})$. *Comme l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ *est convergente, peuisque*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx = [-\frac{1}{2x^2}]_1^{+\infty} = \frac{1}{2},$$

alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+x^2+1}dx$ *est convergente. Par la relation de chasles,* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+x^2+1}dx$ *est convergente.*

Remarque 4. *Si* $f \underset{b}{\sim} g$ *(il existe une fonction* ε *de limite nulle en* b *telle que* $f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x)$ *pour tout* x *d'un voisinage de* b*) et si* g *ne s'annule pas dans un voisinage de* b*, alors les intégrales généralisées* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *sont de même nautue. En effet, si* $f \underset{b}{\sim} g$ *alors* $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$*, et donc d'après le théorème 9, on a le résultat. On peut montrer le résultat directement sans utiliser la condition :* g *ne s'annule pas dans un voisinage de* b*.*

1.3 Intégrales de comparaison

Pour pouvoir utiliser les théorèmes précédents, il faut connaître la nature d'intégrales de fonctions simples, qui serviront d'intégrales de comparaison.

1.3.1 Intégrales de Riemann

Théorème 10.

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha \leq 1$.
2. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, diverge si $\alpha \geq 1$.

Preuve. Il suffit de calculer une primitive de la fonction et de regarder si cette primitive a une limite en $+\infty$. On a la fonction $f : x \longrightarrow \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Une primitive F de f :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ \ln(x) \quad \text{si} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

F admet une limite en 0 en $+\infty$ si $\alpha > 1$ et admet une limite en 0 si $\alpha < 1$. ■

1.3.2 Intégrale de Bertrand

Ces intégrales de comparaisons sont utiles à retenir, non seulement pour le résultat mais aussi pour la méthode utilisée pour l'obtenir.

Théorème 11.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ converge si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha \mid \ln x \mid^\beta}$ converge si $\alpha < 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Remarque 1. *En d'autres termes l'intégrale de Bertrand se comporte comme l'intégrale de Riemann* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ *si* $\alpha \neq 1$ *et comme* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx$ *si* $\alpha = 1$.

Preuve. 1. Si $\alpha \leq 0.$, la fonction $(\dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)})_n$ ne converge pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et l'intégrale diverge (en général, on a si f tend vers une limite non nulle quand x tend vers $+\infty$, alors $\displaystyle\int^{+\infty} f(x)dx$ diverge.
Si $\alpha = 1$, on obtient facilement une primitive F de f :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln(x))^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si} \quad \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) \quad \text{si} \quad \beta = 1. \end{cases}$$

Par conséquent $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si $\beta > 1$.
Si $\alpha < 1$, on écrit

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} = \frac{1}{x}\frac{x^{1-\alpha}}{\ln^\beta(x)}.$$

Mais la fonction $(\dfrac{x^{1-\alpha}}{\ln^\beta(x)})_n$ admet $+\infty$ comme limite lorsque x tend vers $+\infty$. Donc, pour x assez grand

$$\frac{x^{1-\alpha}}{\ln^\beta(x)} \geq 1,$$

et

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} \geq \frac{1}{x}.$$

Il résulte alors du critère de comparaison que l'intégrale diverge.
Si $\alpha > 1$, soit α'tel que $\alpha > \alpha' > 1$. On écrit

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} = \frac{1}{x^{\alpha'}}\frac{x^{\alpha'-\alpha}}{\ln^\beta(x)}.$$

Mais la fonction $(\frac{x^{\alpha'-\alpha}}{\ln^\beta(n)})_n$ admet 0 comme limite lorsque x tend vers ∞. Donc, pour x assez grand

$$\frac{x^{\alpha'-\alpha}}{\ln^\beta(x)} \leq 1,$$

et donc

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} \leq \frac{1}{x^{\alpha'}},$$

Il résulte alors du critère de comparaison que l'intégrale converge.
2. Même preuve. ■

Proposition 12.

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ et , telle que f est prolongeable par continuité en b, c'est à dire telle que f a une limite finie en b, alors : $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Preuve. f est prolongeable par continuité en b, on note $\tilde{f}$ sa prolongée sur $[a, b]$, on alors pour tout $x \in [a, b[$

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \tilde{f}(t)dt = G(x) - G(a),$$

où G est une primitive de $\tilde{f}$ et donc $\int_a^x \tilde{f}(t)dt$ tend vers l'intégrale $\int_a^b \tilde{f}(t)dt$ quand x tend vers b puisque $\lim_{x\to b} G(x) = G(b)$. Ce qui prouve que $\int_a^b f(t)dt$ converge. ■

1.4 Intégrales absolument convergentes

Soit f une fonction continue sur $J = [a, b[$. La fonction $|f|$ est également continue sur $J = [a, b[$. On peut donc se poser le problème de la convergence de l'intégrale $\int_a^b |f(x)|dx$.

Définition 13.

On dira que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument si l'intégrale $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.

Théorème 14.

Soit f une fonction continue sur $J = [a, b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, alors elle converge. De plus

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Remarque 5. *la convergence absolue d'une intégrale entaine sa convergence.*

Théorème 15.

(Critère de convergence absolue)
Soit f une application continue sur $[a,b[$. S'il existe une application φ à valeurs positives, continue sur $[a,b[$ telle que

1. $|f(x)| \leq \varphi(x), \forall x \in [a,b[$,
2. $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ converge,

alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente.

Exemple 2. *Soit a un nombre réel. Considérons la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f_a(x) = \dfrac{\sin ax}{x^2}$, on a $|f_a(x)| \leq \dfrac{|\sin ax|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$. Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, il résulte du critère de comparaison que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f_a(x)|dx$ converge, donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_a(x)dx$ converge absolument, et finalement que cette intégrale converge.*

1.5 Intégrales semi-convergentes

Définition 16.

On dit qu'une intégrale est semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

Pour les intégrales semi-convergentes, on utilise souvent d'autres moyens que les critères de comparaison. Le critère suivant appelé critère d'Abel répond à cette question.

Théorème 17.

(Critère d'Abel)
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
1. f est positive, décroissante sur $[a,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,
2. il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a,+\infty[$,

$$\left| \int_a^x g(x)dx \right| \leq M$$

alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ est convergente.

Chapitre 2

Séries numériques

L'objet de l'étude des séries numériques est de donner un sens à des sommes infinies de nombres réels ou complexes et, éventuellement, de les calculer.

2.1 Généralités sur les séries

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, une suite réelle ou complexe.

Définition 18.

- On appelle série de terme général u_n le couple $((u_n)_{n\geq n_0}, (S_n)_{n\geq n_0})$, où $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
- La suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est appelée la suite des sommes partielles de la série. La série est notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

Définition 19.

- Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite convergente (ou converge) si et seulement si la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles converge (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).
- Lorsque la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est convergente, on note $S = \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} u_n$ la limite de $(S_n)_n$, et S est appelée la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
- Si la suite $(S_n)_n$ ne converge pas, on dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge (ou est divergente).

  On adoptera aussi la notation
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \infty$$
  lorsque la limite de la suite des sommes partielles est infinie. (La série diverge dans ce cas).
- On appellera reste de rang (ou d'ordre) n de la série, le nombre
$$R_n = S - S_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Remarque 6.
- *La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes de cette série. En effet, on peut modifier un nombre fini de termes d'une série sans changer sa nature. En revanche, la valeur de la somme dépend de tous les termes de la série.*
- *Ainsi, les series $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature (c-à-d elles sont toutes deux convergentes ou*

toutes deux divergentes). Si elles convergent, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Exemple 3.

- *Série géométrique réelle : C'est la série de terme général* $u_n = r^n$ *où* $r \in \mathbb{R}$*. Cette série converge si et seulement si* $|r| < 1$ *et dans ce cas* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$*, autrement si* $|r| \geq 1$ *la série est divergente. En effet, on sait calculer les sommes partielles de la série :*

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & si \quad r \neq 1 \\ n+1 \quad si & r = 1. \end{cases}$$

La suite $(r^n)_n$ *a une limite finie si et seulement si* $|r| < 1$ *et cette limite est nulle. Dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Si r est un nombre réel plus grand que 1, la série diverge et la somme est infinie. Dans les autres cas la suite des sommes partielles n'a pas de limite.

- *La série de terme général* $\frac{1}{n}$ *diverge. en effet, en remarquant que, si k ≥1, on a, puisque sur l'intervalle* $[k, k+1]$ *,* $\frac{1}{x}$ *est majoré par* $\frac{1}{k}$*,*

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

on en déduit en sommant ces inégalités terme à terme,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

D'où

$$\ln(n+1) \leq S_n.$$

Il en résulte que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ *admet* $+\infty$ *pour limite, et donc que la série de terme général* $\frac{1}{n}$ *diverge.*

- *Série alternée :* $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$*.* S_n *est nulle si n est impair et* S_n *est égale à 1 si n est pair. Donc* $(S_n)_n$ *n'a pas de limite et la série diverge.*

- *Procédé télescopique : Soit* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *une suite numérique. On pose* $u_n = v_n - v_{n+1}$ *. Alors la série de terme général* u_n *converge si et seulement si la suite* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *converge. De plus*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = v_{n_0} - \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Par exemple si $v_n = \frac{1}{n}$*,* $n \in \mathbb{N}^*$ *alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = v_1 - \lim_{n\to+\infty} v_n,$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

- *Série de terme général* $u_n = n^2$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$. *Donc la série diverge.*
- *Soit* $(u_n)_n$ *une suite dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que, si* $\sum_{p\geq 0} u_{2p}$ *converge et* $\sum_{p\geq 0} u_{2p+1}$ *diverge, alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*

Pour simplifier, nous donnerons les résultats de ce chapitre pour des séries dont de terme général u_n est défini pour $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Premiers critères de convergence

2.2.1 Condition nécessaire et suffisante :

Théorème 20.

(Critère de Cauchy pour les séries) Une série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ (q \geq p \geq N \Rightarrow |\sum_{k=p}^{q} u_k| \leq \varepsilon).$$

Preuve. . Il suffit de remarquer que pour tout $q \geq q \geq N$, $|\sum_{k=p}^{q} u_k| = |S_q - S_{p-1}|$, et d'appliquer le critère de Cauchy pour les suites numériques. ■

Proposition 21.

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve. . On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = S_n - S_{n-1}.$$

Donc, si la suite $(S_n)_n$ a une limite finie S, on en déduit que $(u_n)_n$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0.$$

On peut aussi appliquer le critère de Cauchy pour les séries pour $q = p$. ■

Remarque 7. 1. *La réciproque de cette Proposition est fausse, il se peut qu'une série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge et* $(u_n)_n$ *ne converge pas vers* 0.

Contre exemple : $u_n = ln(n+1) - ln(n)$ *(pour* $n \geq 1$*). La série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge puisque* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = ln(n+1)$ *tend vers l'infini. En revanche,* $u_n = ln(1 + \frac{1}{n})$ *converge vers* 0.

2. *Si le terme général d'une série ne tend pas vers 0 alors la série ne converge pas. Exemple : la série* $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$.

Proposition 22.

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors son $n^{\text{ème}}$ reste R_n converge vers 0.

Preuve. . On a $\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty}(S - S_n) = S - S = 0$. ■

Proposition 23.

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont deux séries convergentes, de somme S_n et S'_n respectivement, alors la série $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$ est convergente, de somme $S + S'$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n)$ est convergente, de somme λS.

2.2.2 Séries à termes positifs

Définition 24.

Une séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite à termes (réels) positifs si si tous les termes de la série sont positifs, i.e. $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 25.

Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes positifs converge si et seulement si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ est majorée. Dans ce cas, on a pour tout entier n

$$S_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Preuve. . On a

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0,$$

et la suite $(S_n)_n$ est croissante. Une telle suite converge si et seulement si elle est majorée. Si elle converge, sa limite majore les termes de la suite. ■

Théorème 26.

(critère de comparaison) Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge,
- si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Preuve. . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Donc la suite des somme parielle associée à la série $\sum_{n\geq 0}^{n} u_n$ est majorée, d'après la Proposition 25, la série $\sum_{n\geq 0}^{n} u_n$ converge.

La deuxième assertion est obtenue par contraposée. ■

Théorème 27.

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

Si $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve. . On a $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$ alors il existe un entier naturel N et une suite $(\varepsilon_n)_n$ vérifiant

$$u_n = \varepsilon_n v_n, \text{ pour tout } n \geq N \text{ et } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

A partir d'un certain rang, on a aussi

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2},$$

Donc, à partir d'un certain rang,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} v_n.$$

Comme $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2} v_n$ converge, d'après Théorème 26, $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, et donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. ■

Théorème 28.

(Théorème d'équivalence) Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs. Si u_n et v_n sont équivalents au voisinage de $+\infty$ ($u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$), alors les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Preuve. . On a, à partir d'un certain rang

$$u_n = (1+\varepsilon_n)v_n, \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

A partir d'un certain rang, on a alors

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{2} \leq 1+\varepsilon_n \leq \frac{3}{2}.$$

D'où

$$\frac{v_n}{2} \leq u_n = (1+\varepsilon_n)v_n \leq \frac{3v_n}{2}.$$

Il suffit alors d'appliquer le Théorème 27 deux fois. ∎

Remarque 8. *Il est important que les suites aient un signe constant comme le montre l'exemple suivant :*

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n},$$

La série de terme général vn converge. Par contre la série de terme général u_n diverge comme somme d'une série convergente de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et d'une série divergente de terme général $\frac{1}{n}$. De plus

$$u_n = v_n(1+v_n) \sim v_n.$$

Théorème 29.

(Comparaison entre séries et intégrales) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f : [N;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive, et soit $u_n = f(n)$. Alors la série $\sum_{n\geq N} u_n$ et $\int_N^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature.

Puisque f est décroissante, on a

$$f(x) \leq f(n) = u_n, \text{ pour } x \geq n$$

et

$$f(n) = u_n \leq f(x), \text{ pour } x \in [N,n]$$

Donc pour $n \geq N$,

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx = f(n),$$

et pour $n \geq N+1$

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n)dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx.$$

En sommant jusqu'à un entier naturel M assez grand

$$\sum_{n=N}^{M}\int_{n}^{n+1} f(x)dx = \int_{N}^{M+1} f(x)dx \leq \sum_{n=N}^{M} f(n),$$

et

$$\sum_{n=N}^{M} f(n) \leq f(N) + \sum_{n=N+1}^{M}\int_{n-1}^{n} f(x)dx = f(N) + \int_{N}^{M} f(x)dx,$$

Donc

$$\int_{N}^{M+1} f(x)dx \leq \sum_{n=N}^{M} f(n) \leq f(N) + \int_{N}^{M} f(x)dx.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq N} u_n$ et $\int_{N}^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature. ■

Exemple 4. *la série harmonique* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *diverge, puisque*

$$\int_{N}^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{N}^{M}\frac{1}{x}dx \lim_{M\to+\infty} \ln(M)-\ln(N) = +\infty.$$

2.2.3 Séries de comparaison

Théorème 30.

(Séries de Riemann) La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve. . Si $\alpha \leq 0.$, la suite $(\frac{1}{n^\alpha})_n$ ne converge pas vers 0 et la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge. Si $\alpha > 0$, posons

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

C'est une fonction décroissante positive. On obtient facilement une primitive F de f :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Par conséquent $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si $\alpha > 1$. Ce qui donne le résultat. ■

Théorème 31.

(Séries de Bertrand) La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge i et seulement si l?on a un des deux cas suivants :

- $\alpha > 1$
- $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Preuve. . Si $\alpha \leq 0.$, la suite $(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)})_n$ ne converge pas vers 0 et la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ diverge.
Si $\alpha = 1$ et $x \geq 2$, posons

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^\beta(x)}.$$

En calculant la dérivée de f , on constate qu'elle est négative sur un intervalle de la forme $[N, +\infty[$. Donc f est une fonction décroissante positive sur cet intervalle. On obtient facilement une primitive F de f :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(\ln(x))^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si} \quad \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) & \text{si} \quad \beta = 1. \end{cases}$$

Par conséquent $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si $\beta > 1$.
Si $\alpha < 1$, on écrit

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = \frac{1}{n}\frac{n^{1-\alpha}}{\ln^\beta(n)}.$$

Mais la suite $(\frac{n^{1-\alpha}}{\ln^\beta(n)})_n$ admet $+\infty$ comme limite. Donc, pour n assez grand

$$\frac{n^{1-\alpha}}{\ln^\beta(n)} \geq 1,$$

et

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \geq \frac{1}{n}.$$

Il résulte alors du critère de comparaison que la série diverge.
Si $\alpha > 1$, soit α'tel que $\alpha > \alpha' > 1$. On écrit

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = \frac{1}{n^{\alpha'}}\frac{n^{\alpha'-\alpha}}{\ln^\beta(n)}.$$

Mais la suite $(\frac{n^{\alpha'-\alpha}}{\ln^\beta(n)})_n$ admet $+\infty$ comme limite. Donc, po

$$\frac{n^{\alpha'-\alpha}}{\ln^\beta(n)} \leq 1,$$

ur n assez grand

$$\frac{n^{\alpha'-\alpha}}{\ln^\beta(n)} \leq 1,$$

et donc

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \leq \frac{1}{n^{\alpha'}},$$

Il résulte alors du critère de comparaison que la série converge. ∎

2.2.4 Critères de convergences

Théorème 32.

(Règle de Cauchy) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une séries à termes positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$ existe.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Preuve. .

1. Soit $\ell < 1$, puisque $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell < 1$, soit a tel que : $\ell < a < 1$. Alors, pour $\varepsilon = a - \ell > 0$, il existe n_0 tel que, $\forall n \geq n_0$, on a
$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq a,$$
c'est à dire, $\forall n \geq n_0$, on a
$$u_n < a^n.$$
Comme la série $\sum_{n\geq 0} a^n$ converge (série géométrique avec $0 < a < 1$), on déduit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Soit $\ell > 1$. On a, Alors, pour $\varepsilon = \ell - 1 > 0$, $\forall n \geq n_0$, $(u_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$. Ainsi, u_n ne converge pas vers 0, ce qui implique la divergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$.
3. Soit $\ell = 1$. Les deux séries de termes général respectif $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ vérifient cette condition. On sait que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. En revanche, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. En effet :
La somme partielle $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)} = 1 + \sum_{i=2}^{n} (\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$
Comme la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est majorée, on déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. ■

Théorème 33.

(Règle de d'Alembert) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une séries à termes strictement positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ existe.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Preuve. .

1. Soit $\ell < 1$, puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$, soit a tel que : $\ell < a < 1$. Alors, il existe n_0 tel que, $\forall n \geq n_0$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a,$$
Donc, si $n \geq n_0 + 1$, on a
$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq a^{n-n_0},$$
donc, après une simplification, $u_n \leq u_{n_0} a^{n-n_0} = \frac{u_{n_0}}{a^{n_0}} a^n$. Comme la série $\sum_{n\geq 0} a^n$ converge (série géométrique avec $0 < a < 1$), on déduit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

2. Soit $\ell > 1$. On a $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Ainsi, $(u_n)_n$ est croissante. On a alors $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > 0$, et donc u_n ne converge pas vers 0, ce qui implique la divergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$.

3. Soit $\ell = 1$. Les deux séries de termes général respectif $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ vérifient cette condition car $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Or la première diverge tandis que la deuxième converge.

Théorème 34.

(Règle de Riemann) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs.On suppose que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ possède une limite ℓ. Alors

- si l est finie et $\alpha > 1$ la série de terme général u_n converge.
- si $l > 0$ et si $\alpha \leq 1$ la série de terme général u_n diverge.

Preuve. . Si la limite l est finie, à partir d'un certain rang, on a
$$n^\alpha u_n < l + 1,$$
et donc
$$u_n < \frac{l+1}{n^\alpha}.$$
La série dont le terme général est le membre de droite converge si $\alpha > 1$. Donc la série de terme général u_n converge si $\alpha > 1$.
Si la limite l n'est pas nulle, à partir d'un certain rang, on a
$$n^\alpha u_n > K,$$
où
$$K = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si} \quad l \text{ finie} \\ 1 & \text{si} \quad l \text{ infinie.} \end{cases}$$
Donc si $\alpha \geq 1$
$$u_n \geq \frac{K}{n^\alpha}$$
La série dont le terme général est le membre de droite diverge si $\alpha < 1$. Donc la série de terme général u_n diverge $\alpha < 1$. ∎

2.3 Séries numériques absolument convergente

Définition 35.

On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à terme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.

Proposition 36.

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

2.4 Séries semi-convergentes

Définition 37.

On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à terme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est semi- convergente s'elle converge sans converger absolument.

Pour montrer qu'une série converge, sans être absolument convergente, on utilise fréquemment un critère spécial appelé, critère d'Abel. Nous allons commencer par donner un cas particulier, le critère de Leibniz.

Proposition 38.

Si $(v_n)_n$ est une suite qui décroît vers 0, alors la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n v_n$ converge. De plus

$$|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k v_k| \leq |v_{n+1}|$$

Preuve. . On peut supposer la suite $(v_n)_n$ est positive (sinon on considère $(-v_n)_n$. On considère la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles. Alors

$$S_{2n+2} - S_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$$

et

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = v_{2n} - v_{2n+1} \geq 0$$

La suite $(S_{2n})_n$ est décroissante, et la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante. Comme

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -v_{2n+1},$$

la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})_n$ converge vers 0. Les suites S_{2n} et S_{2n+1} sont donc adjacentes et ont la même limite finie S. Alors c'est la limite de la suite $(S_n)_n$, ce qui montre que la série de terme général $(-1)^n v_n$ converge. De plus, pour tout entier n,

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} = S_{2n+1} + v_{2n+2},$$

donc

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq v_{2n+2}.$$

De même

$$S_{2n} - v_{2n+1} = S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n},$$

donc

$$-v_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0.$$

On en déduit que, pour tout entier n,

$$|S_n - S| \leq v_{n+1}.$$

■

Remarque 9. *Il résulte immédiatement de ce critère que la série de terme général* $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *converge si* $\alpha > 0$. *On sait qu'elle converge absolument si et seulement si* $\alpha > 1$. *Donc si* $0 < \alpha \leq 1$ *elle est semi-convergente. (Si* $\alpha \leq 0$*, le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série diverge).*

Théorème 39.

Critère d'Abel) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série telle que $u_n = a_n b_n$ $(n \in \mathbb{N})$, avec

1. $A = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée,
2. la suite $(b_n)_n$ décroît vers 0.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve. .On applique la règle de Cauchy pour $q \geq p$.

$$\sum_{i=p}^{q} u_i = \sum_{i=p}^{q} a_i b_i = \sum_{i=p}^{q} (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=p}^{q} A_i b_i - \sum_{i=p}^{q} A_{i-1} b_i = \sum_{i=p}^{q} A_i b_i - \sum_{j=p-1}^{q-1} A_j b_{j+1}$$

$$= A_q b_q + \sum_{i=p}^{q-1} A_i b_i - A_{p-1} b_p - \sum_{j=p}^{q-1} A_j b_{j+1} = A_q b_q - A_{p-1} b_p + \sum_{i=p}^{q-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

D'où, $\left|\sum_{i=p}^{q} u_i\right| \leq |A_q| b_q + |A_{p-1}| b_p + \sum_{i=p}^{q-1} |A_i| (b_i - b_{i+1}).$

Par hypothèse, il existe $M < +\infty$ tel que $|A_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\left|\sum_{i=p}^{q} u_i\right| \leq M b_q + M b_p + M \sum_{i=p}^{q-1} (b_i - b_{i+1}) \leq 2M_p.$$

Comme $(b_n)_n$ converge vers 0, on peut conclure, d'après la règle de Cauchy pour les séries, que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

2.5 Multiplication des séries

Théorème 40.

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente, et soit $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série convergente. Alors la série produit $\sum_{n\geq 0} w_n$, de terme général

$$w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}, \quad n \in \mathbb{N},$$

est convergente, et sa somme est le produit des deux sommes des deux séries de départ. Si de plus $\sum_{n\geq 0} v_n$ est absolument convergente, la série produit est absolument convergente.

Chapitre 3

Les séries de fonctions

On va combiner maintenant la notion de série et la notion de convergence uniforme. On considère donc une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et l?on forme lasuite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ où pour $x \in J$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x).$$

Rappelons tout d'abord quelques résultats sur les suites de fonctions.

3.1 Rappels sur les suites de fonctions

3.1.1 Convergence simple

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexe, définies sur le même ensemble A, et soit f une fonction sur A.

Définition 41.

On dit que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur A (ou que f est une limite simple de la suite $(f_n)_n$) si, pour tout $x \in A$ fixé, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. Ceci se traduit par

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Remarque 10. 1. *Le N dépend à la fois de ε et de x.*

2. *Pour la convergence simple, on regarde donc valeur par valeur les suites numériques $(f_n(x))_n$.*

3. *Les théorèmes obtenus pour ces suites restent donc vrais (limite de sommes, produits, quotients, etc ...).*

Exemple 5. 1. *Soit $f_n : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ définie par*

$$x \longmapsto f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$$

Il facile de voir que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0;1[; \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

2. *Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2},\ n \in \mathbb{N}$$

- *Pour $x \neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.*
- *Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.*
  $(f_n)_n$ converge donc simplement vers la fonction f définie par

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. *Étudier la convergence simple de la suite de fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$x \longmapsto f_n(x) = nxe^{-nx^2} + x,\ n \in \mathbb{N}$$

3.1.2 Convergence uniforme

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexe, définies sur le même ensemble A, et soit f une fonction sur A.

Définition 42.

On dit que la suite $(f_n)_n$ ***converge uniformément*** vers f sur A (ou que f est unelimite uniforme de la suite $(f_n)_n$) si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

En d'autres termes,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon).$$

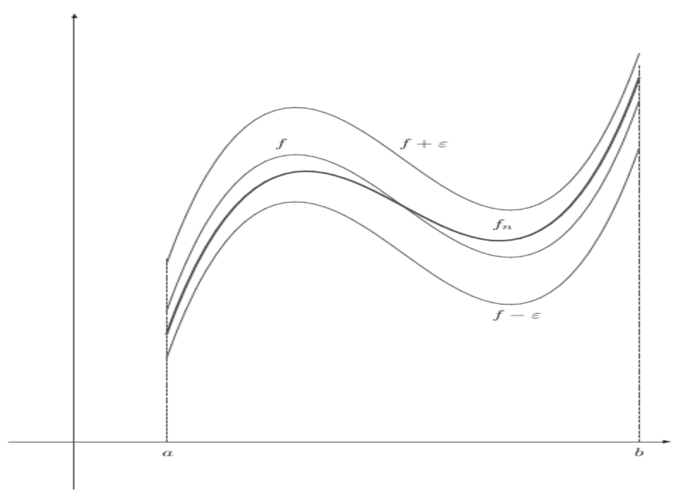
avec $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} |f(x)|$.

Remarque 11. 1. *Le N ne dépend plus que de ε.*

2. *La notion de la convergence uniforme est beaucoup plus forte que celle de la convergence simple.*

3. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), si f_n converge uniformément vers f et si g_n converge uniformément vers g alors $\lambda f_n + g_n$ converge uniformément vers $\lambda f + g$.*

4. *Interprétation géométrique : voir la figure ci-dessous.*



Exemple 6. 1. *On a vu dans l'exemple précèdent que la suite de fonctions $f_n : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ définie par $x \longmapsto f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ converge simplement vers la fonction f définie par $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0;1[; \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$*

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| &= \max\left(\sup_{x\in[0;1[} |f_n(x) - f(x)|; |f_n(1) - f(1)|\right) \\ &= \max\left(\sup_{x\in[0;1[} x^n; 0\right) = \max(1;0) = 1 \end{aligned}$$

qui ne converge pas (lorsque n tend vers $+\infty$) vers 0. Donc $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$.

2. *De même, la suite de fonction* $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$ *converge simplement vers la fonction* f *définie par* $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \neq 0; \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$

   On a
$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{nx^2}{1+nx^2} - 1| = \frac{1}{1+nx^2}.$$
   en étudiant cette fonction sur $\mathbb{R}$, *on voit que* $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ *ne tend vers 0, donc la convergence n'est pas uniforme sur* $\mathbb{R}$. *Par contre, en étudions la convergence uniforme sur les deux intervalles* $[a;+\infty[$ *et* $[0;a[$, *avec* $a \in \mathbb{R}_+^*$.

   - *Si* $x \in [a;+\infty[$, *on a la suite convergence uniformément sur* $[a;+\infty[$.
   - *Si* $x \in [0;a[$, *on a la suite ne convergence pas uniformément sur* $[a;+\infty[$ *car Choisissons* $n > \dfrac{1}{a^2}$, *alors* $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \in [0;a[$, *ainsi,* $|f_n(\dfrac{1}{\sqrt{n}}) - f(\dfrac{1}{\sqrt{n}})| = \dfrac{1}{2}$. *Donc*
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}.$$
     D'où $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}|} f_n(x) - f(x)|$ *ne tend pas vers 0 quand* n *tend vers* $+\infty$. ■

Remarque 12. 1. *La convergence uniforme entraîne la convergence simple. (La réciproque est fausse: voir les exemples ci-dessus).*

2. *Posons* $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} |f(x)|$. *Alors la fonction* f *est limite uniforme de la suite* $(f_n)_n$ *sur* A *si et seulement si la suite numérique* $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ *converge vers* 0.

En pratique, pour étudier si une suite (f_n) converge uniformément, on commencera par déterminer sa limite simple f , par un calcul de limite. Si l'on peut, par l'étude des variations de la fonction $|f_n - f|$ par exemple, déterminer la borne supérieure de $|f_n - f|$.

Dans certains cas, le calcul de $\|f_n - f\|_\infty$ n'est pas faisable. Voici deux critères permettant de conclure soit à la convergence uniforme, soit à la non convergence uniforme.

Proposition 43.

La suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si il existe une suite numérique (a_n) de limite nulle telle que l'on ait, pour tout x de A
$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n.$$

On a **Preuve.**
$$0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$$
. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a le résultat. ■

Proposition 44.

S'il existe une suite (x_n) de points de A telle que, la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne converge pas vers 0, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

Preuve. . On a
$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$
D'où le résultat. ■

Proposition 45.

Critère de Cauchy : La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ \forall x \in A\ (q \geq p \geq N \Rightarrow |f_q(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon).$$

Problème : Etant donnée une suite $(f_n)_n$ de fonctions dont on connaît les propriétés (par exemple continuité, dérivabilité, intégrabilité), la limite f possède t-elle les mêmes propriétés?

Les théorèmes qui suivent montrent l'intérêt de la convergence uniforme par rapport aux autres modes de convergence.

Théorème 46.

(Continuité) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies sur un intervalle J et soit b un point de J. On suppose que

1. $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur J.
2. $\lim\limits_{x \to b} f_n(x) = \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Alors

1. $(\alpha_n)_n$ converge vers un nombre α .
2. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \alpha$.

On a donc interversion des limites

$$\lim_{n\to+\infty} (\lim_{x\to b} f_n(x)) = \lim_{x\to b} (\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) = \lim_{x\to b} f(x).$$

Preuve. . On démontre tout d'abord que la suite $(\alpha_n)_n$ converge en montrant que c'est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_n$ converge uniformément, elle vérifie le critère de Cauchy de convergence uniforme. Il existe N , tel que, si $n > m \geq N$, on ait, quel que soit x,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En faisant tendre x vers b, on obtient

$$|\alpha_n - \alpha_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ceci démontre bien que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de Cauchy. Notons α sa limite. Il reste à voir que $f(x)$ tend vers α en b.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_n$ converge uniformément, il existe N , tel que, $n \geq N$, implique, quel que soit x dans J,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

il existe aussi N' tel que, $n \geq N'$ implique

$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Fixons $n \geq \max(N, N')$. Puisque $f_n(x)$ tend vers α_n en b, il existe une ensemble J_ε tel que, $x \in J_\varepsilon$ implique

$$|f_n(x) - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(L'ensemble J_ε est de la forme $[b-\eta, b[$ si b est la borne supérieure finie de J, $[K, +\infty[$ si $b = +\infty$ etc...)
Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$|\alpha - f(x)| \leq |\alpha - \alpha_n| + |\alpha_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ce qui montre que $f(x)$ tend vers α en b. ∎

Théorème 47.

(Continuité) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $J = [a;b]$ dans $\mathbb{R}$. Si on a les propriétés suivantes :

i) Les fonctions f_n sont continues sur $[a;b]$ pour tout n.

ii) La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a;b]$.

alors la limite f est continue sur $[a;b]$.

Preuve. . Soit $x_0 \in J$. On applique ce qui précède avec $b = x_0$. Alors $\alpha_n = f_n(x_0)$. Puisque la suite converge simplement vers f , on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0) = \alpha.$$

Alors le théorème précédent affirme que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire que f est continue en x_0. ∎

Théorème 48.

(Intégration) Si on a les propriétés suivantes :

i) les fonctions f_n sont intégrables sur $[a;b]$ pour tout n.

ii) la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a;b]$.

alors

i) la limite f est intégrable sur $[a;b]$.

ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

Preuve. . On a pour tout x de J

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty,$$

donc en intégrant

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty$$

et alors

$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f n(x) - f(x)| dx \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty$$

Et comme le membre de droite converge vers 0, il en est de même de celui de gauche. ∎

3.2 Séries de fonctions

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et l?on forme lasuite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ où pour $x \in A$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x).$$

Il y plusieurs types de convergence envisageables pour une série de fonctions :

3.2.1 Convergence Simple

Définition 49.

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur A si et seulement la suite des sommes partielles $(S_n(x))_n$ converge simplement sur A, c'est-à-dire si pour tout $x \in A$ fixé, la suite numérique $(S_n(x))_n$ est convergente. Dans ce cas, on note

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Remarque 13.

- *Si B est une partie de A, on dit que $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur B si et seulement si $\sum_{n\geq 0} f_{n|B}(x)$ converge simplement sur B, c'est-à-dire si et seulement si, pour chaque x de B, la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge dans $\mathbb{K}$.*
- *On appelle domaine de convergence simple de $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ l'ensemble des x de A tels que $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.*
- *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonction qui converge simplement sur A, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction R_n définie sur A par : $\forall x \in A$, $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{i=n+1}^{+\infty} f_i(x)$ est appelée le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.*

3.2.2 Convergence Absolue

Définition 50.

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolument sur A si la série $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ converge simplement sur A. C'est-à-dire si pour tout x de A la suite $(S_n(x))_n$ définie par

$$T_n(x) = \sum_{n\geq 0} |f_n(x)|,$$

possède une limite finie.

3.2.3 Convergence uniforme

Définition 51.

- On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ ***converge uniformément*** sur A si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformément sur A.
- Si l'on note S cette limite uniforme, formellement, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow \|S_n - S\|_\infty \leq \varepsilon).$$

Donc, cela signifie que la suite $(\|S_n - S\|_\infty)_n$ converge vers 0.

Remarque 14. *1. Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ et $\sum_{n\geq 0} g_n$ convergent uniformément sur A et si $\lambda \in \mathbb{K}$ est fixé, alors $\sum_{n\geq 0}(\lambda f_n + g_n)$ converge uniformément sur A.*

2. Si B est une partie de A, on dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur B si et seulement si $\sum_{n\geq 0} f_{n|B}$ converge uniformément sur B.

3. Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur B et si $C \subset B$, alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur C.

Proposition 52.

Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur A, alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur A.

Preuve. . Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément, alors la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles converge uniformément vers S, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0.$$

Comme

$$f_n = S_n - S_{n-1},$$

alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty &= \lim_{n\to+\infty} \|S_n - S_{n-1}\|_\infty \\ &= \lim_{n\to+\infty} \|S_n - S + S - S_{n-1}\|_\infty \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\|_\infty + \lim_{n\to+\infty} \|S_{n-1} - S\|_\infty = 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat. ∎

Proposition 53.

$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si

i) La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur A.

ii) La suite $(R_n)_n$ des restes converge uniformément vers 0 sur A.

3.2.4 Convergence normale

Définition 54.

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur A, si la série numérique à termes positifs $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge.

Remarque 15.

1. *Si* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} g_n$ *convergent normalement sur* A *et si* $\lambda \in \mathbb{K}$ *est fixé, alors* $\sum_{n\geq 0}(\lambda f_n + g_n)$ *converge normalement sur* A.
2. *Si* B *est une partie de* A*, on dit que* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge normalement sur* B *si et seulement si* $\sum_{n\geq 0} f_{n|B}$ *converge normalement sur* B.
3. *Si* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge normalement sur* B *et si* $C \subset B$*, alors* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge normalement sur* C.

3.2.5 Convergence absolue uniforme

Définition 55.

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolument uniformément sur J si la suite de fonctions $(T_n)_n$ converge uniformément sur J. Donc si l'on note T la limite uniforme, cela signifie que la suite $(\|T_n - T\|_\infty)$ converge vers 0.

3.3 Critères de convergence uniforme d'une série de fonctions

Pour montrer que la convergence normale implique toutes les autres, donnons tout d'abord le critère de Cauchy de convergence uniforme pour les séries, qui est l'application à la suite des sommes partielles du critère de Cauchy de convergence uniforme :

Théorème 56.

(Critère de Cauchy uniforme) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ \forall x \in A\ (q \geq p \geq N \Rightarrow |\sum_{n=p+1}^{q} f_n| \leq \varepsilon).$$

Preuve. . Remarquons que $S_q - S_p = \sum_{i=p+1}^{q} f_i$. Ainsi, Il suffit d'appliquer le Critère de Cauchy de convergence uniforme d'une suite de fonctions. ∎

Comme on a

$$|\sum_{n=p+1}^{q} f_n| \leq \sum_{n=p+1}^{q} |f_n| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|f_n\|_\infty,$$

il résulte immédiatement du critère de Cauchy uniforme que, si la série converge normalement, elle donc uniformément et absolument uniforme sur A.Plus exactement, on a

Théorème 57.

On a les résultats importants suivants :

1. Convergence normale $\Rightarrow$ Convergence uniforme $\Rightarrow$ Convergence simple.
2. Convergence normale $\Rightarrow$ Convergence absolue uniforme $\Rightarrow$ Convergence absolue $\Rightarrow$ Convergence simple.

Remarque 16. *Les notions de convergence uniforme et absolue sont deux notions parallèles qui ne s'impliquent pas l'une et l'autre.*

Théorème 58.

(Critère de Weierstrass)
Une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur A, s'il existe $(u_n)_n$ une série numérique à termes positifs convergente, telle que

$$\forall x \in A, |f_n(x)| \leq u_n.$$

Preuve. On a en effet

$$\|f_n\|_\infty \leq u_n,$$

et la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge. Donc la série de terme général f_n converge normalement donc uniformément sur A. ■

Le critère de Weierstrass est un critère de convergence absolue. Pour les séries qui ne convergent pas absolument, on a le critère d'Abel :

Théorème 59.

Critère d'Abel) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies sur A telle que $u_n(x) = a_n(x)b_n(x)$, $x \in A$ $(n \in \mathbb{N})$, avec

1. la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)$ est bornée par un nombre M indépendant de n et de x,
2. la suite $(b_n)_n$ décroît uniformément vers 0.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur A.

Preuve. . la preuve est basée sur le critère d'Abel pour les séries numériques. ■

3.4 Propriétés de la convergence uniforme d'une série de fonctions

Nous donnons sans démonstration quelques propriétés qui se déduisent immédiatement de celles de la convergence uniforme des suites de fonctions par application à la suite des sommes partielles.

Théorème 60.

(Continuité) Si la série de terme général $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur A, sa somme S est une fonction continue sur A.

Théorème 61.

(Intégration) Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur $[a;b]$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a;b]$,
alors

i) la série $\sum_{n\geq 0}\Big(\int_a^b f_n(x)\,dx\Big)$ est convergente,

ii) $\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\Big)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$

Théorème 62.

(Dérivation) Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions. Si

i) pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n dérivables,

ii) il existe $x_0\in A$ pour lequel $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge,

iii) $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur A,

alors

i) $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur A,

ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivables,

iii) $\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$

Chapitre 4

Séries entières

4.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons vu les propriétés générales des ***séries de fonctions***. Dans ce chapitre, nous allons étudier une famille particulière de séries de fonctions, ***les séries entières***, qui possèdent des propriétés particulières.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 63.

- On appelle ***série entière complexe*** toute série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de fonctions définies de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f_n(z) = a_n z^n$, où $(a_n)_n$ est une suite de $\mathbb{K}$.
- On appelle ***série entière réelle*** toute série $\sum_{n\geq n} f_n$ de fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ par $f_n(t) = a_n t^n$, où $(a_n)_n$ est une suite de $\mathbb{K}$.

Remarque 17.

- *Dans la suite de ce chapitre, on considère surtout des séries entières complexes. Les propriétés des séries entières réelles s'en déduisent.*
- *En pratique, la suite $(a_n)_n$ est souvent une suite réelle.*
- *Les scalaires $(a_n)_n$ sont appelés les coefficients de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.*
- *Le scalaire a_n est le $(n+1)$-ième coefficient de la série ou encore le coefficient d'ordre n. Le scalaire a_0 est le terme constant de la série.*

Exemple 7. *1.)* $\sum_{n\geq 0} z^n$ *2.)* $\sum_{n\geq 0} nz^n$ *3.)* $\sum_{n\geq 0} n!z^n$ *4.)* $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ *5.)* $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ *6.)* $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

4.1.1 Rayon de convergence : propriétés et définition

Proposition 64.

Si une série entière (de terme général $a_n z^n$) converge pour un complexe z_0 ($z_0 \neq 0$), alors elle converge absolument pour tout complexe z vérifiant $|z| < |z_0|$.

Preuve. La convergence de la série numérique de terme général $a_n z_0^n$ implique que $\lim_{n\to+\infty} a_n z_0^n = 0$. On peut déduire donc que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée. C-à-d, il existe une constante $M \geq 0$ telle que, pour tout entier n, $|a_n z_0^n| \leq M$.
Ainsi, pour tout complexe z (fixé) tel que $|z| < |z_0|$, on a $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \times |\frac{z^n}{z_0^n}| \leq M|\frac{z^n}{z_0^n}|$. Puisque $|\frac{z}{z_0}| < 1$, la série de terme général $M|\frac{z}{z_0}|^n$ converge et il en est donc de même de la série de terme général $|a_n z^n|$. ■

Lemme 1. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière, s'il existe un complexe non nul* z_0 *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_n$ *soit bornée alors la série entière* $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ *converge pour tout complexe* z *vérifiant* $|z| < |z0|$.

Lemme 2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière. Soit* λ *un réel vérifiant* $0 \leq \lambda < 1$. *S'il existe un complexe non nul* z_0 *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_n$ *soit bornée alors la série entière* $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ *est normalement convergente sur le disque fermé de centre* 0 *et de rayon* $\lambda|z_0|$, *c'est-à-dire pour tous les complexes* z *vérifiant* $|z| \leq \lambda|z_0|$.

Théorème 65.

Soit $(a_n)_n$ une suite de $\mathbb{K}$.

- L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}_+ / \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.
- La borne supérieure $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de cet ensemble est appelée ***rayon de convergence de la série entière*** $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Preuve. Il est clair que $0 \in I$ et, pour tout $r \in I$, le segment $[0; r] \subset I$. Il en résulte que I est un intervalle de $\mathbb{R}_+$.

Exemple 1.

- *Le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0} z^n$ *est* $R = 1$.
- *Le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0} n! z^n$ *est* $R = 0$.
- *Le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ *est* $R = +\infty$.

Théorème 66.

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est caractérisé par

- $|z| < R \Rightarrow$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument ;
- $|z| > R \Rightarrow$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.

Remarque 18.

- *On ne change pas le rayon de convergence d'une série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *en modifiant un nombre fini de coefficients* a_n.
- *Par définition, les séries* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} |a_n| z^n$ *ont le même rayon de convergence.*
- *Pour tout* $\lambda \neq 0$, *les séries* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n z^n$ *ont même rayon de convergence.*

- *Soient R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs de deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors on a $R_2 \leq R_1$ (Exercice).*

- *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, tels que, à partir d'un certain rang, $\lambda|a_n| \leq |b_n| \leq \mu|a_n|$, alors les séries ont le même rayon de convergence. De même si $|a_n| \sim |b_n|$ (au voisinage de $+\infty$).*

Proposition 67.

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une suite entière et $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ son rayon de convergence.

- Si $R = 0$, alors la série ne converge que pour $z = 0$.
- Si $R = +\infty$, alors la série converge absolument et simplement sur $\mathbb{C}$. De plus, cette convergence est normale (donc uniforme) sur tout ensemble borné de $\mathbb{C}$.
- Si R est un nombre réel strictement positif, alors la série converge absolument sur le disque ouvert $B(0,R) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$ et la série diverge sur $\{z \in \mathbb{C}/|z| > R\}$. De plus, cette convergence est normale (donc uniforme) sur tout ensemble fermé borné (compact) de $B(0,R)$. En particulier pour le disque fermé $\{z \in \mathbb{C}/|z| \leq \rho\}$ quelque soit le réel positif $\rho < R$.

Preuve. On a

- si $R = 0$, pour tout complexe non nul z, la suite $(a_n|z|^n)_n$ ne tend pas vers 0 donc $(a_n z^n)_n$ ne tend pas vers 0. La série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.
- Si $R = +\infty$, alors, pour tout complexe non nul z, par exemple, la suite $(a_n(2z)^n)_n$ est bornée. Puisque $|z| \leq |2z|$, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Il suffit d'appliquer le Théorème 2.

Définition 68.

Soit R un réel strictement positif, $B(0,R) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$ est appelé ***disque ouvert de convergence*** de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Lorsque $R = +\infty$, on pose $B(0,R) = \mathbb{C}$.

Remarque 19.

- *Dans le cas d'une série entière réelle $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ de rayon de convergence R. L'intervalle ouvert de convergence de la série est $]-R,R[$ si $R \in \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}$ si $R = +\infty$.*

- *En général, on ne peut rien dire si $|z| = R$. Par exemple, les séries entières réelles $\sum_{n\geq 0} t^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n^2}$ ont toutes les trois un rayon de convergence égal à 1. Dans $\mathbb{R}$, $|t| = 1$ implique $t = -1$ ou $t = 1$. Les séries $\sum_{n\geq 0} 1^n$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ sont divergentes et les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2}$ sont convergentes.*

- *Une série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *n'est pas nécessairement uniformément convergente (et, à fortiori, pas normalement convergente) sur tout son disque ouvert de convergence. Par exemple, la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme* $[-a,a]$ *où* $0 < a < 1$ *mais elle n'est pas uniformément convergente sur* $]-1;1[$.

Proposition 69.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, et soit R son rayon de convergence.

Si $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors on a $R = \dfrac{1}{\ell}$ avec la convention : $R = +\infty$ si $\ell = 0$ et $R = 0$ si $\ell = +\infty$.

Preuve. On a $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} \times |z|$. Pour montrer le résultat de la proposition, il suffit d'utiliser la règle de Cauchy sur les séries numériques à termes positifs.

- Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\limsup_{n\to+\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \ell \times |z|$. Si $|z| < \dfrac{1}{\ell}$, on a $\limsup_{n\to+\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} < 1$ et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument. Si $|z| > \dfrac{1}{\ell}$, on a $\limsup_{n\to+\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} > 1$ et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge. Par conséquent, $R = \dfrac{1}{\ell}$.
- Si $\ell = 0$, pour tout complexe z, $\limsup_{n\to+\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = 0 < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $\ell = +\infty$, pour tout complexe non nul z, $\limsup_{n\to+\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = +\infty > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.

■

Proposition 70.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, et soit R son rayon de convergence. On suppose qu'à partir d'un certain rang les coefficients a_n sont non nuls.

Si $\lim_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors on a $R = \dfrac{1}{\ell}$ avec la convention : $R = +\infty$ si $\ell = 0$ et $R = 0$ si $\ell = +\infty$.

Preuve. On a $|\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}| = |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| \times |z|$. Pour montrer le résultat de la proposition, il suffit d'utiliser la règle de D'Alembert sur les séries numériques à termes positifs.

- Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}| = \ell \times |z|$. Si $|z| < \dfrac{1}{\ell}$, on a $\lim_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}| < 1$ et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument. Si $|z| > \dfrac{1}{\ell}$, on a $\lim_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}| > 1$ et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge. Par conséquent, $R = \dfrac{1}{\ell}$.

- Si $\ell = 0$, pour tout complexe z, on a $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}| = 0 < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $\ell = +\infty$, pour tout complexe non nul z, $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}| = +\infty > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.

■

Exercice 71.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

- $\sum_{n\geq 0} n^2 z^n$.
- $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$.
- $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2} z^n$.
- $\sum_{n\geq 0} C_n^{2n} z^n$.
- $\sum_{n\geq 0} (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}) z^n$.

4.2 Fonction somme d'une série entière : Continuité et opérations

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Théorème 72.

Une série entière converge normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé strictement inclus dans le disque ouvert de convergence.

Preuve. Soient R le rayon de convergence et $0 \leq r < R$; les inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq r \Rightarrow |a_n z^n| = |a_n| \times |z^n| \leq |a_n| \times r^n = \alpha_n$$

montrent que la série entière converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon r, puisque α_n est le terme général d'une série numérique convergente ($r < R$). ■

Remarque 20.

- *Dans le cas réel, la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$.*
- *En général, il n'y a ni convergence normale, ni convergence uniforme sur le disque ouvert ou l'intervalle ouvert de convergence.*
  Exemple : la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Théorème 73.

La somme d'une série entière est une fonction continue sur le disque ouvert de convergence.

■

Pour tout $n \in N$, $z \mapsto a_n z^n$ est continue sur $\mathbb{K}$, la série entière converge uniformément sur tout disque fermé (strictement) inclus dans le disque ouvert de convergence, sa somme est donc continue sur tous les disques fermés du disque ouvert de convergence, donc continue sur ce disque ouvert de convergence. ■

Remarque 21.

- *Dans le cas réel, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$.*
- *Si la série $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ est convergente, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R. La somme S est donc définie et continue sur le disque fermé $\{z/|z| \leq R\}$.*

Théorème 74.

Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_1 et R_2, alors :

1. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n z^n$ est R_1 et :
$$\forall z \in \mathbb{K}, |z| < R_1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
2. le rayon de convergence R_s de la série entière $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R_s = \min(R_1;R_2)$ si $R_1 \neq R_2$ et $R_s \geq R_1 = R_2$ sinon, et :
$$\forall z \in \mathbb{K}, |z| < \min(R_1;R_2) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$
3. le rayon de convergence R_p de la série entière produit $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ vérifie $R_p \geq \min(R_1;R_2)$, et :
$$\forall z \in \mathbb{K}, |z| < \min(R_1;R_2) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big) z^n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p \Big) \Big(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q \Big)$$

Preuve.

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, la suite $(|a_n|r^n)_n$ est majorée si et seulement si, la suite $(|\lambda a_n|r^n)_n$ l'est. Ainsi le rayon vaut R_1.

2. Si $|z| < \min(R_1; R_2)$, les séries $\sum_{n\geq 0} |a_n|r^n$ et $\sum_{n\geq 0} |b_n|r^n$ sont convergentes. la série $\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$ est (absolument) convergente, $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ et $R_s \geq \min(R_1; R_2)$.
Si les rayons R_1 et R_2 sont distincts, par exemple $R_1 < R_2$, prenons $r \in]R_1; R_2[$; les inégalités $|a_n + b_n|r^n > |a_n|r^n - |b_n|r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrent que la suite $(|a_n + b_n|r^n)_n$ n'est pas majorée, et donc $R_s \leq r$. Ainsi $]R_1; R_2[\subset [R_s; +\infty[$ et $R_s \leq R_1 = \min(R_1; R_2)$. D'où le résultat.

3. Si $|z| < \min(R_1; R_2)$, les séries $\sum_{n\geq 0} |a_n|z^n$ et $\sum_{n\geq 0} |b_n|z^n$ sont absolument convergentes. La série produit (de Cauchy) l'est aussi et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k}\Big) = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q\Big)$$

■

Remarque 22. • *Lorsque les rayons de convergence R_1 et R_2 de deux séries sont égaux, on ne peut pas prévoir le rayon de convergence de la somme des séries.*
Par exemple, le rayon de convergence des séries $\sum_{n\geq 0} z^n$ et $\sum_{n\geq 0} -z^n$ est 1. Pourtant leur somme est nulle donc de rayon de convergence $+\infty$.

- *Si $R_1 = R_2$ et si $a_n b_n = 0$ pour tout n (on dit alors que les* ***séries entières sont disjointes****), alors $R_s = R_1 = R_2$. Raisonnons par l'absurde, si $R_s > R_1 = R_2$, prenons $r \in]R_1; R_s[$, dans ces conditions, la suite $(|a_n|r^n)_n$ n'est pas majorée, tandis que $(|a_n + b_n|r^n)_n$ l'est. Or, $|a_n|r^n \leq (|a_n| + |b_n|)r^n = |a_n + b_n|r^n$, ce qui est contradictoire.*
Ainsi, si les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_{2n} z^{2n}$ et $\sum_{n\geq 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$ ont le même rayon de convergence R, la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ admet R pour rayon de convergence.

Théorème 75.

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors S admet un développement limité à tout ordre en 0.
$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + o(z^n)$ *au voisinage de* $z = 0$

Preuve. Pour tout $|z| < R$, on peut écrire :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + z^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n} = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + z^n \varepsilon(z)$$

Or, $\varepsilon(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+n} z^k$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
La fonction ε définit une fonction continue sur le disque ouvert de convergence et $\lim_{z\to 0} \varepsilon(z) = \varepsilon(0) = 0$.
D'où, le résultat demandé. ■

Remarque 23. *La réciproque est fausse en général. Il ne suffit pas d'avoir un développement limité à tout ordre pour conclure que S est développable en série entière. C'est ce que nous allons voir dans les sections qui suivent.*

Définition 76.

On appelle ***série dérivée*** de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, la série $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Proposition 77.

Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

Preuve. Soient R et R' les rayons de la série et de sa dérivée. Si $r > R$, la suite $(|a_n| r^n)_n$ n'est pas bornée, donc la suite $((n+1)a_{n+1} r^n)_n$ non plus et donc $r \geq R'$. Il en résulte que $R' \leq R$.
D'autre part, si $r < R$, choisissons $\rho \in]r; R[$. La suite $(|a_n|\rho^n)_n$ est bornée et $|(n+1)a_n| r^n = |a_n|\rho^n (n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ tend vers 0 donc $r \leq R'$. Il en résulte $R \leq R'$. ■

Corollaire 78.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit p un entier non nul.
La série entière $\sum_{n\geq 0} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p} z_n = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z_n$ est appelée ***série dérivée p-ième*** de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et a le même rayon de convergence que celle-ci

Remarque 24. *Une série entière et ses séries dérivées successives, même si elles ont le même rayon de convergence, peuvent avoir des comportements différents aux points du bord du disque ouvert de convergence.*

Corollaire 79.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Alors S est dérivable sur $]-R; R[$ ou sur $\mathbb{R}$ si $R = +\infty$ et, sur cet ensemble,

$$S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$

Corollaire 80.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. L'application S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R; R[$ ou sur $\mathbb{R}$ si $R = +\infty$ et, sur cet ensemble,

$$\forall p > 0,\ S^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} t^n = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n t^{n-p}.$$

Remarque 25. *Les corollaires précédents signifient que la somme d'une série entière est infiniment dérivable sur son intervalle de convergence. De plus, on peut dériver, terme à terme et autant de fois que veut, la somme d'une série entière, sur son intervalle ouvert de convergence. En effet, dans le cas des séries entières, les conditions (en particulier la convergence uniforme de la dérivée) du théorème de dérivation des séries de fonctions sont vérifiées.*

Corollaire 81.

- Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Pour tout entier n, le coefficient a_n est égal à $\frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.
- Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et Soit $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ et de sommes respectives S_1 et S_2.
  On suppose qu'il existe un réel strictement positif $\rho \leq \min(R_1, R_2)$ tel que, $\forall z \in B(0,\rho)$, $S_1(z) = S_2(z)$. Alors ces deux séries sont identiques, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Ici les séries entières considérées possèdent une variable réelle.

Théorème 82.

1. Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$ ont le même rayon de convergence R.
2. pour tout segment $[\alpha;\beta]$ de $]-R;R[$, on a :
$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$$
3. pour tout $x \in]-R;R[$, on a :
$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Preuve.

1. $\frac{a_n}{(n+1)} \sim \frac{a_n}{n}$, ce qui montre l'égalité des rayons.
2. la série $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$, le théorème d'intégration terme à terme des séries fait le reste.
3. Un cas particulier de 2.

■

Exercice 83.

1. Trouver le domaine de convergence et vérifier s'il y a convergence à ses extrémités pour les séries entières suivantes :
   (a) $\sum_{n\geq 0} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$.
   (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}$.
   (c) $\sum_{n\geq 0} \alpha^n z^{2n+1}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$ une constante.
2. Rayon de convergence R et somme S de la série entière :
   (a) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$.
   (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{3n+2}$.
   (c) $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2-1} x^n$.

Remarque 26. • *La somme d'une série entière est une fonction de classe C^∞ sur le disque ouvert de convergence. Réciproquement, peut-on considérer qu'une fonction de classe C^∞ est la somme d'une série entière ?*

Définition 84.

- Une fonction f d'une variable complexe est dite ***développable en série entière*** s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon R strictement positif, tel que :

$$\forall |z| < R, f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

- Une fonction f d'une variable réelle est dite ***développable en série entière*** s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon R strictement positif, tel que :

$$\forall x \in]-R; R[, f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

- On peut aussi définir un développement en série entière au voisinage de z_0, en posant :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$$

- Ce développement, quand il existe, est unique puisque $a_n = \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}$.

Exemple 2. • *La fonction $x \mapsto e^x$ est développable en série entière en 0 :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Plus généralement :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = e^{x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

• *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière en 0 :*

$$\forall x \in]-1;1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

• *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière en 0 :*

$$\forall x \in]-1;1[,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Théorème 85.

(Propriétés : Condition nécessaire)

1. Une condition nécessaire pour que f soit développable en série entière est que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de l'origine. Et dans ce cas, il existe un réel $R > 0$ tel que, sur $]-R, R[$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
2. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelé ***série de MacLaurin*** (ou ***série de Taylor***) de f en $x = 0$.

Preuve. Il suffit d'appliquer directement les corollaires 79, 80 et 81. ■

Remarque 27. • *Même si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine, et même si la série de MacLaurin de f a un rayon de convergence strictement positif, on ne peut pas affirmer que f est développable en série entière en 0.*

• *Exemple :* $f :\mapsto f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Théorème 86.

Propriété : Condition nécessaire et suffisante
Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de l'origine.
f est développable en série entière ***si et seulement si***

$$\exists r > 0,\ \forall x \in]-r, r[,\ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \frac{x^{n+1}}{n!} R_n(x)$$

où $R_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\, dt$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

Preuve. Ce n'est que l'application de la formule de Taylor avec reste intégral en effectuant le changement de variable $t = xu$ (pour $x \neq 0$). En effet on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{x^{n+1}}{n!} R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\,dt$.

La fonction f est développable en série entière si et seulement si la série de MacLaurin de f converge vers f sur un intervalle $]-r;r[$, i.e. si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. ■

Théorème 87.

Propriété : Condition suffisante Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de l'origine, alors
$(\exists r > 0,\ \exists M > 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-r,r[, |f^{(k)}(x)| \leq M) \Rightarrow f$ est développable en série entière sur $]-r;r[$.

Preuve. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{x^{n+1}}{n!} R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\,dt$.

pour tout $x \in]-r;r[$,

$$\begin{aligned} |\frac{x^{n+1}}{n!} R_n(x)| &\leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |f^{(n+1)}(tx)|\,dt \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n M\,dt \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{n!} \frac{M}{n+1} \end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. D'où le résultat. ■

Corollaire 88.

Soient f et g deux fonctions développables en série entière en 0 de développement $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} b_n z^n$, alors

1. Pour tous scalaires α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est développable en série entière en 0. Le développement est alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$.
2. La fonction fg est développable en série entière en 0. Le développement est alors le produit de Cauchy des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{+\infty} b_n z^n$.

Corollaire 89.

Soient f et g deux fonctions développables en série entière en 0 de développement $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} b_n z^n$. Si $f(0)=0$, alors alors gof est développable en série entière en 0. Le développement est alors obtenu en substituant la série $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ dans la série $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} b_n z^n$.

Proposition 90.

Si f est développable en série entière en 0, et si $f(0)\neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est développable en série entière en 0.

Proposition 91.

Soit f une fonction développable en série entière en 0, alors

- Les dérivées successives de f sont développables en série entière en 0. Le développement de $f^{(p)}$ s'obtient en dérivant terme à terme p fois celui de f.
- Toute primitive F de f est développable en série entière en 0. Le développement de F s'obtient en intégrant terme à terme celui de f. Le terme constant étant la valeur de F en 0.

Remarque 28.

- *Méthode directe : en utilisant la formule de Taylor ou Maclaurin.*
- *Par dérivation et intégration : si l'on sait développer une fonction primitive (resp. la fonction dérivée).*
- *Cas des fractions rationnelles : décomposition en éléments simples, puis sommation des séries entières obtenues.*
- *Si f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ développable en série entière sur $]-r;r[$ par $f(x)=\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n$, alors on peut définir une fonction $\widetilde{f}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sur $B(0;r)$ en posant $\widetilde{f}=\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$.*

4.3 Fonctions développables en série entière : Développements usuels

- **Fonction Exponentielle :**
  - $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, $(R=+\infty)$
  - $\forall a>0$, $a^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln^n(a)}{n!}x^n$, $(R=+\infty)$

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $(R = +\infty)$

- **Fonctions trigonométriques directes :**
  - $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(R = +\infty)$
  - $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(R = +\infty)$
  - $ch\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(R = +\infty)$
  - $sh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(R = +\infty)$

- **Développement de** $(1+x)^\alpha$
  - $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, $(R = 1)$
  - $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$, $(R = 1)$
  - $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $(R = 1)$

- **Logarithme népérien :**
  - $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $(R = 1)$
  - $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $(R = 1)$

- **Fonctions trigonométriques réciproques :**
  - $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(R = 1)$
  - $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\cdots.(2n+1)}{2.4\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(R = 1)$

Chapitre 5

Séries de Fourier

5.1 Séries trigonométriques

Définition 92.

- ***Forme réelle :*** Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres complexes. On appelle ***série trigonométrique*** toute série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$,

$$a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- ***Forme complexe :*** Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexe. On appelle ***série trigonométrique*** toute série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$,

$$c_0 + \sum_{n\geq 1}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$$

Remarque 29. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_n et b_n deux nombres complexes. On a alors*

- $a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} = (c_n + c_{-n})\cos nx + i(c_n - c_{-n})\sin nx$. *Ainsi,*
  - $a_0 = c_0$,
  - $\forall n \geq 1, \left\{ a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = ic_n - ic_{-n} \right.$
  - $\forall n \geq 1, \left\{ c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} \right.$
- *Ce qui permet de passer des c_n aux a_n et b_n.*

5.1.1 Cas des séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$

Théorème 93.

On considère une série trigonométrique vérifiant les conditions équivalentes:

i) les deux séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes.

ii) Les deux séries $\sum |c_n|$ et $\sum |c_{-n}|$ sont convergentes.

Alors la série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$, sa somme S est une fonction continue périodique de période 2π et on a

- $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S(t)e^{-int}\,dt$
- $\forall n \geq 1,\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S(t)\cos nt\,dt$
- $\forall n \geq 1,\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S(t)\sin nt\,dt$

Preuve. . La remarque 29 nous permet d'en déduire que
$|c_n| \leq \frac{1}{2}(|a_n| + |b_n|)$, $|c_{-n}| \leq \frac{1}{2}(|a_n| + |b_n|)$, $|a_n| \leq |c_n| + |c_{-n}|$ et $|b_n| \leq |c_n| + |c_{-n}|$.
Ainsi, l'équivalence des deux assertions ***i)*** et ***ii)*** sont montrées.
Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| \leq |c_n| + |c_{-n}| = \alpha_n$ et la série de terme général α_n converge, le critère de Weierstrass entraîne que la série $c_0 + \sum_{n\geq 1}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ ce qui assure que sa somme est continue. Cette somme est évidemment périodique de période 2π puisque toutes les fonctions $x \longmapsto c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}$ le sont.
D'un coté, pout tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c_0 e^{-ipx} + \sum_{n\geq 1}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})e^{-ipx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; 2\pi]$, car $|(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})e^{-ipx}| \leq |c_n| + |c_{-n}| = \alpha_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} S(t)e^{-ipt}\,dt &= \int_0^{2\pi} \Big(c_0 e^{-ipt} + \sum_{n\geq 1}(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int})e^{-ipt}\Big)dt \\
&= c_0 \int_0^{2\pi} e^{-int}\,dt + \sum_{n\geq 1}\Big(c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} + c_{-n}\int_0^{2\pi} e^{-i(n+p)t}\Big)dt \\
&= 2\pi\Big(c_0\delta_{0,p} + \sum_{n\geq 1}\Big(c_n\delta_{n,p} + c_{-n}\delta_{-n,p}\Big) \\
&= 2\pi c_p. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

5.2 Coefficients de Fourier

5.2.1 Fonctions complexes 2π-périodiques et continues par morceaux : les espaces $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et $\mathcal{DM}_{2\pi}$

Définition 94.

(Rappel)

- On rappelle qu'une fonction f définie sur $[a; b]$ est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(t_0 = a, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n = b)$ telle que f soit continue sur chaque intervalle ouvert $]t_i; t_{i+1}[$ de cette subdivision et admettent des limites à gauche et à droite (à gauche en b et à droite en a) en tous les points $(t_i)_{0\leq i\leq n}$.
- Toute fonction continue par morceaux sur $[a; b]$ est intégrable sur $[a; b]$.

Définition 95.

- On note par $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques et continues par morceaux.
- $\mathcal{DM}_{2\pi}$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques et continues par morceaux et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ (où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x.
- Pour f et g de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on pose
  $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt,$
  $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle},$
  $e_n : t \longmapsto e^{int}.$

Théorème 96.

L'application $(f,g) \longmapsto \langle f|g\rangle$ est une forme hermitienne positive sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$ dont la restriction sur $\mathcal{DM}_{2\pi}$ est définie positive. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour toute $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on a $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ (norme de la convergence uniforme).

Preuve. . Il est facile de vérifier que l'application $(f,g) \longmapsto \langle f|g\rangle$ est une forme sesquilinéaire, symétrique hermitienne. Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on a $\langle f|f\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \geq 0$. D'autre part, si $\langle f|f\rangle = 0$ alors f est soit nulle en tout points de $[0;2\pi]$ où elle est continue, soit sur $[0;2\pi]$ à l'exception d'un nombre fini de points. Or f est considérée dans $\mathcal{DM}_{2\pi}$, alors en chacun de ces points on a $f(x^+) = f(x^-) = 0$ (car il existe tout un intervalle ouvert à gauche de x sur lequel f est nul, et de même à droite) et donc $f(x) = 0$, par conséquent, f est la fonction nulle sur $[0;2\pi]$, donc sur $\mathbb{R}$. ■

Proposition 97.

$(\mathcal{CM}_{2\pi}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Preuve. . La preuve est immédiate. ■

Remarque 30.

- *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} f \text{ est } 2\pi\text{–périodique} \\ f_{|[0;2\pi]} \text{ est continue par morceaux.} \end{cases}$$

- *Les fonctions de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ sont bornées et on peut se restreindre à un intervalle de longueur 2π pour en déterminer les bornes (cas réel).*

$$\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi}, \|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t\in[\alpha,\alpha+2\pi]} |f(t)|$$

- *La donnée d'une fonction g continue par morceaux sur un segment $[a;a+2\pi]$ de longueur 2π définit une fonction f 2π-périodique et continue par morceaux en posant*

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & si\ t \in [a;a+2\pi[; \\ g(t-2n\pi), & si\ t \in [a+2n\pi; a+2n\pi+2\pi[. \end{cases}$$

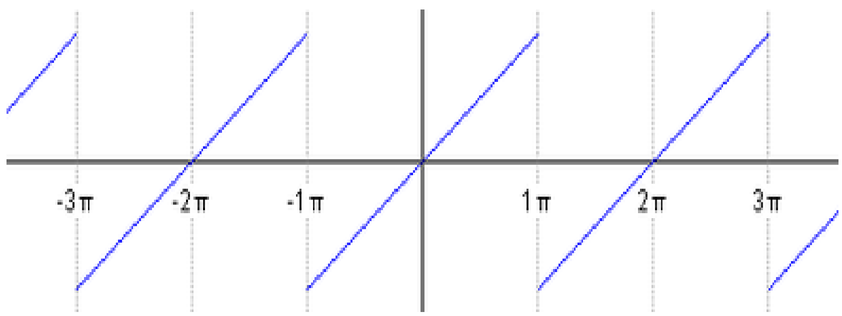
- *L'intégrale sur une période d'une fonction périodique est indépendante de la période choisie. On prendra $[0;2\pi]$ ou $[-\pi;\pi]$ ou d'autres segments suivant le cas.*

- *L'utilisation d'un changement de variable permet de passer d'une fonction T-périodique à une fonction 2π-périodique. Pour cela, on note $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsation et*
  - *si h est une fonction T-périodique, alors $f : t \longrightarrow h(\dfrac{T}{2\pi}t) = h(\dfrac{t}{\omega})$ est une fonction 2π-périodique.*
  - *si f est une fonction 2π-périodique, alors $h : t \longrightarrow f(\dfrac{2\pi}{T}t) = f(\omega t)$ est une fonction T-périodique.*

Exemple 8. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ π-périodique, définie par*

$$f(x) = x \text{ si } x \in [-\pi;\pi[$$

f est bien un élément de $\mathcal{CM}_\pi$.



5.2.2 Coefficients de Fourier d'une fonction

Définition 98.

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier de f par

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = c_n(f) = \langle e_n | f \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$

Le coefficient noté $c_n(f)$ ou $\widehat{f}(n)$ est appelé coefficient exponentiel de Fourier d'ordre n de f, les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont les coefficients trigonométriques de f.

Remarque 31. *Les fonctions intégrées étant 2π-périodiques, on a aussi pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)\cos nt\,dt$,

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\sin nt\,dt$
- *En particulier* $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$ *et* $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$.
- $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ *est la valeur moyenne de* f *sur une période.*
- $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ *et* $b_n(f) = i(c_n(f) - c{-}n(f))$.
- *Attention!* $a_0(f) = 2c_0(f)$ *et* $b_0(f) = 0$.

5.2.3 Propriétés des coefficients de Fourier

Proposition 99.

(Linéarité par rapport à la fonction)
Pour tout entier n, c_n, a_n et b_n sont des formes linéaires sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$, i.e., par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall (f,g) \in (\mathcal{CM}_{2\pi})^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2, c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$$

Ainsi, $f \longrightarrow \widehat{f}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ vers $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Preuve. . La linéarité de l'intégrale donne la solution. ∎

Proposition 100.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodiques.

1. **Conjugaison :** pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$, $a_n(\overline{f}) = \overline{a_n(f)}$, $b_n(\overline{f}) = \overline{b_n(f)}$.
   Si f est à valeurs réelles, on a $a_n(f) \in \mathbb{R}$, $b_n(f) \in \mathbb{R}$ et $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.
2. **Parité :** Si $\widetilde{f}$ désigne la fonction $t \longmapsto f(-t)$, on a
   $$c_n(\widetilde{f}) = c_{-n}(f),\ a_n(\widetilde{f}) = a_n(f),\ b_n(\widetilde{f}) = -b_n(f)$$
   Si f est paire (resp. impaire) on a $c_n(f) = c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = 0$ (resp. $c_n(f) = -c_{-n}(f)$ et $a_n(f) = 0$).
3. **translation :** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\tau_a f$ désigne la fonction $t \longmapsto f(t+a)$, on a
   $$c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$$

Preuve. . Exercice. ∎

Lemme 3. *(Riemann-Lebesgue)*
Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, $c_n(f)$ *tend vers* 0 *quand* $|n|$ *tend vers* $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{n\mapsto\pm\infty} c_n(f) = \lim_{n\mapsto+\infty} a_n(f) = \lim_{n\mapsto+\infty} b_n(f) = 0$$

Preuve. .

- **Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$:**
  $c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt=\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{in}\,dt=\frac{1}{in}c_n(f')$
  Ainsi,
  $$|c_n(f)|=|\frac{1}{in}c_n(f')|\leq\frac{\|f'\|_1}{|n|}$$
  et
  $$\lim_{|n|\mapsto+\infty}\frac{\|f'\|_1}{|n|}=0$$
  avec $\|f'\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,dt$.

- **Cas des fonctions en escalier :**
  Soient φ une fonction en escalier, $\sigma=(a_k)_{k\in[0;p]}$ une subdivision adaptée, λ_k la valeur (constante) de φ sur l'intervalle ouvert $]a_k-1;a_k[$, alors
  $$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)e^{-int}\,dt=\sum_{k=1}^{p}\int_{a_{k-1}}^{a_k}\lambda_k e^{-int}\,dt=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\frac{e^{-ina_k}-e^{-ina_{k-1}}}{-in}$$
  et
  $$c_n(\varphi)=\frac{1}{2\pi|n|}\Big|\sum_{k=1}^{p}\lambda_k(e^{-ina_k}-e^{-ina_{k-1}})\Big|\leq\frac{1}{2\pi|n|}\sum_{k=1}^{p}\Big|\lambda_k\Big|(e^{-ina_k}-e^{-ina_{k-1}})\leq\frac{1}{2\pi|n|}\sum_{k=1}^{p}2\Big|\lambda_k\Big|$$
  D'où le résultat puisque
  $$\lim_{|n|\mapsto+\infty}\frac{1}{2\pi|n|}\sum_{k=1}^{p}2\Big|\lambda_k\Big|=0$$

- **Cas général :**
  Soient $f\in\mathcal{CM}_{2\pi}$ et $\varepsilon>0$, il existe une fonction en escalier φ_ε sur $[-\pi;\pi]$ telle que $\|f-\varphi_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon$. Ainsi
  $$|c_n(f)|=|c_n(f-\varphi_\varepsilon)+c_n(\varphi_\varepsilon)|\leq|c_n(f-\varphi_\varepsilon)|+|c_n(\varphi_\varepsilon)|\leq\|f-\varphi_\varepsilon\|_\infty+|c_n(\varphi_\varepsilon)|\leq\varepsilon+|c_n(\varphi_\varepsilon)|$$
  Puisque $\lim_{|n|\mapsto+\infty}|c_n(\varphi_\varepsilon)|=0$, il existe un rang N tel que $|n|>N$ implique $|c_n(\varphi_\varepsilon)|<\varepsilon$ et donc $|c_n(f)|<2\varepsilon$, ce qui montre que $\lim_{|n|\mapsto+\infty}c_n(f)=0$.
  Les coefficients trigonométriques $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont des combinaisons linéaires des coefficients exponentiels $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$, ils admettent donc 0 comme limite.

■

5.2.4 Coefficient de Fourier d'une dérivée

Proposition 101.

Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors
$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f')=in\,c_n(f)$$

Preuve. . Il suffit d'utiliser une intégration par parties. ■

Proposition 102.

Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

Preuve. . Une récurrence sur k donne le résultat. ∎

Proposition 103.

Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur R, alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

Preuve. . Une récurrence sur k donne le résultat. ∎

Corollaire 1. *Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux) sur R, alors $c_n(f)$ est négligeable devant $|n|^{-k}$ quand $|n|$ tend vers l'infini.*

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right) (n \to +\infty)$$

Preuve. . Considérons l'égalité $c_n(f) = (in)^{-k} c_n(f^{(k)})$, puisque le lemme de Riemann-Lebesgue montre que $\lim\limits_{|n| \to +\infty} c_n(f^{(k)}) = 0$, le résultat est démontré. ∎

5.3 Série de Fourier

5.3.1 Somme partielle d'une série de Fourier

Définition 104.

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux. On appelle série de Fourier de la fonction f la série trigonométrique

$$c_0(f) + \sum_{n \geq 1} (c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx}) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx)$$

Définition 105.

Pour $n \geq 1$, la somme partielle de la série de Fourier associée à f est

$$S_n(f)(x) = c_0(f) + \sum_{p=1}^{n} (c_p(f) e^{ipx} + c_{-p}(f) e^{-ipx}) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{p=1} (a_p(f) \cos px + b_p(f) \sin px)$$

Remarque 32. *Dans la suite du chapitre, nous allons étudier les conditions sur x qui donne la convergence la série de Fourier. En cas de convergence, nous allons étudier sa somme, en particulier, cette somme est-elle égale à $f(x)$?*

5.3.2 Inégalité de Bessel

Définition 106.

- Pour $n \geq 1$, on note par $T_n = vect\{e_{-n}, e_{-n+1}, \cdots, e_{-1}, e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n\}$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n.
- On a également

$$T_n = \{P \,|\, P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{n} (a_p \cos px + b_p \sin px)\}$$

Lemme 4. *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux. Alors*

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{p=-n}^{n} |c_p(f)|^2$$

Preuve. . On a $S_n(f) \in T_n$ (polynôme trigonométrique de degré n) et $(e_{-n}, e_{-n+1}, \cdots, e_{-1}, e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ est une base orthonormée de T_n (voir théorème 96).
Alors, $(c_{-n}, c_{-n+1}, \cdots, c_{-1}, c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, c_n)$ sont ses coordonnées dans cette base. Par suite la norme au carré de $S_n(f)$ n'est que la somme des carrés des modules de ses coordonnées. C-à-d $\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{p=-n}^{n} |c_p(f)|^2$. ∎

Lemme 5. *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux. Alors $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel T_n.*

Preuve. . Puisque $S_n(f) \in T_n$, il suffit de montrer que $\forall p \in [-n; n]$, $\langle e_p | f - S_p(f) \rangle = 0$, ou encore $\forall p \in [-n; n]$, $\langle e_p | f \rangle = \langle e_p | S_p(f) \rangle$. Mais $\langle e_p | S_p(f) \rangle$ est la coordonnée suivant e_n de $S_p(f)$ (car la base est orthonormée), ce qui donne donc $c_n(f) = \langle e_p | f \rangle$. Ainsi, on montre le résultat. ∎

Théorème 107.

(Inégalité de Bessel) Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux. Alors la série

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n \geq 1} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)$$

est convergente et on a

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) \leq \|f\|_2^2$$

Preuve. . Puisque $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur T_n, on a $f = S_n(f) + (f - S_n(f))$ avec $(S_n(f) \perp (f - S_n(f)))$. Le théorème de Pythagore nous permet d'avoir $\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2$. D'où, d'après le lemmme 4,

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{p=1}^{n} (|c_p(f)|^2 + |c_{-p}(f)|^2) = \|S_p(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

Donc la somme partielle de la série à termes positifs $|c_0(f)|^2 + \sum_{p \geq 1} (|c_p(f)|^2 + |c_{-p}(f)|^2)$ est majorée par $\|f\|_2^2$, donc elle convergente et sa somme est majorée par $\|f\|_2^2$. ∎

5.3.3 Les théorèmes de Dirichlet

Lemme 6. *Pour tout entier $n \leq 1$ et pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,*

$$\sum_{p=-n}^{n} e^{ipx} = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Preuve. .

$$\begin{aligned}
\sum_{p=-n}^{n} e^{ipx} &= e^{-inx}\sum_{p=0}^{2n} e^{ipx} \\
&= e^{-inx}\frac{e^{i(2n+1)x}-1}{e^{ix}-1} \\
&= \frac{e^{i(n+1)x}-e^{-inx}}{e^{ix}-1} \\
&= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x}-e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

■

Théorème 108.

(de Dirichlet).

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx})$$

Preuve. .

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-n}^{n} e^{inx}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\sum_{p=-n}^{n} e^{in(x-t)})\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt
\end{aligned}$$

En posant $t = x+u$, on obtient

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} f(x+u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,du
\end{aligned}$$

Car la fonction intégrée est 2π-périodique et donc son intégrale sur tout intervalle de longueur 2π est la même. Séparons l'intégrale en deux, l'une de $-\pi$ à 0, l'autre de 0 à π. Dans la première effectuons un changement de variable $u = -2v$ et dans la seconde le changement de variable $u = 2v$. On obtient

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2v)\frac{\sin(2n+1)v}{\sin v}\,dv + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2v)\frac{\sin(2n+1)v}{\sin v}\,dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2v)+f(x-2v))\frac{\sin(2n+1)v}{\sin v}\,dv
\end{aligned}$$

Appliquons le résultat précédent à la fonction constante $f_0 : x \longrightarrow 1$, on a évidemment $S_n(f_0)(x) = 1$ puisque $c_0(f_0) = 1$ et $c_n(f_0) = 0$ pour $n \neq 0$, on obtient

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)v}{\sin v}\,dv$$

On en déduit que

$$S_n(f)(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2v)-f(x^+)+f(x-2v)-f(x^-)}{\sin v}\sin(2n+1)v\,dv$$

Considérons la fonction g 2π-périodique définie par

- $g(v) = \dfrac{f(x+2v)-f(x^+)+f(x-2v)-f(x^-)}{\sin v}$ pour $v \in]0; \dfrac{\pi}{2}]$,
- $g(0) = 2(f'(x^+) - f'(x^-))$,
- $g(v) = 0$ pour $v \in]\dfrac{\pi}{2}; 2\pi[$.

Comme la fonction $\widetilde{f}$ définie par $\widetilde{f}(x) = f(x^+)$ et $\widetilde{f}(t) = f(t)$ pour $t > x$ est dérivable à droite au point x (car f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), on a

$$\frac{f(x+2v)-f(x^+)}{\sin v} \sim (v \sim 0^+)\frac{f(x+2v)-f(x^+)}{v}$$

entraîne

$$\lim_{v\to 0^+}\frac{f(x+2v)-f(x^+)}{\sin v} = \lim_{v\to 0^+} 2\frac{\widetilde{f}(x+2v)-\widetilde{f}(x)}{2v} = 2f'(x^+)$$

De même

$$\lim_{v\to 0^+}\frac{f(x-2v)-f(x^-)}{\sin v} = -2f'(x^-)$$

Ceci montre que g est continue à droite au point 0. Ainsi, on peut en déduire que g est continue par morceaux. Or

$$S_n(f)(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(v)\sin(2n+1)v\,dv = b_{2n+1}(g)$$

D'après le théorème de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n(f)(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}) = \lim_{n\to+\infty} b_{2n+1}(g) = 0$$

D'où le résultat du théorème. ■

Théorème 109.

(de Dirichlet)

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue. Alors la série

$$|c_0(f)| + \sum_{n\geq 1}(|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|)$$

converge, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx})$$

C-à-d f est la somme de sa série de Fourier.

Preuve. . Pour $n \neq 0$, on a

$$0 \leq |c_n(f)| = |\frac{c_n(f')}{in}| \leq \frac{1}{2}(|c_n(f)|^2 + \frac{1}{n^2})$$

(car $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$) D'où, d'après théorème de Bessel, la série $\sum_{n\geq 1} |c_n(f')|^2$ converge. De même, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann). En conclusion, la série $\sum_{n\geq 1} |c_n(f)|$ converge. De la même manière, on peut montrer que la série $\sum_{n\geq 1} |c_{-n}(f)|$ converge. D'où la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}(|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|)$.
D'autre part, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$$

qui est une série convergente indépendamment de x, la série de Fourier converge normalement. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le premier théorème de Dirichlet on obtient le résultat du théorème. ■

5.3.4 Le théorème de Parseval

Lemme 7. *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g 2π-périodique définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue telle que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.*

Preuve. . Admis. ■

Théorème 110.

(Égalité de Parseval)
Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux. Alors

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \\ &= |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) \\ &= \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \end{aligned}$$

Preuve. . On sait que

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{p=1}^{n}(|c_p(f)|^2 + |c_{-p}(f)|^2) = \|S_p(f)\|_2^2$$

D'autre part, on a $\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2$, voir la preuve du théorème 107 (inégalité de Bessel). Il suffit donc de démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$.

__1er cas :__ supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue. On sait que la série de Fourier converge normalement, donc uniformément vers f. On a donc $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_{+\infty} = 0$. Par ailleurs, on a $\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|f - S_n(f)\|_{+\infty}$, ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$.

__2ème cas :__ si f est seulement continue par morceaux, d'après le lemme 7, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g 2π-périodique définie de $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue telle que $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, d'après le 1er cas, on a $\lim_{n\to+\infty} \|g - S_n(f)\|_2 = 0$ et donc, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \geq n_0$ on a $\|g - S_n(f)\|_2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Or, comme $S_n(f) \in T_n$ et que $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f dans T_n, on a

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_2 &\leq \|f - S_n(g)\|_2 \\ &\leq \|f - g\|_2 + \|g - S_n(g)\|_2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

D'où le résultat.
Pour l'autre égalité, il suffit d'appliquer un simple calcul (voir remarque 31) pour en déduire que

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

■

Corollaire 2. *(Injectivité de la transformation de Fourier)*
Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{DM}_{2\pi}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = c_n(g)$. Alors $f = g$.

Preuve. . On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n(f - g) = 0$, soit encore, d'après le théorème de Parseval, $\|f - g\|_2 = 0$. Comme $(f - g) \in \mathcal{DM}_{2\pi}$ sur laquelle le produit scalaire est définie positif (voir théorème 96) on a $f - g = 0$. ■

Remarque 33. *Si on suppose seulement que f et g sont continues par morceaux, on obtient seulement que f et g coïncident sauf en un nombre fini de points (sur un intervalle de longueur 2π).*

Chapitre 6

Devoirs surveillés

6.1 Sujet

Exercice 1 : Soit α un réel strictement positif. On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^n(1-x)^\alpha & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ et trouver sa limite f.
2. Déterminer les valeurs de α pour que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
3. On suppose que $0 < \alpha \leq 1$. Soit $0 \leq a < 1$.
   (a) Montrer que : $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ a \leq \dfrac{n}{n+\alpha}$.
   (b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,a]$.

Exercice 2 :

1. (a) Pour $|x| < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n(x) = x^n$. Calculer la somme $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$.
   (b) Soit $0 < a < 1$. Montrer la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ converge uniformément sur $[-a,a]$.
   (c) Prouver que la fonction H est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
   (d) Déduire la somme de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ pour $x \in]-1,1[$.
2. Soit b un nombre réel strictement positif. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$u_n(x) = \begin{cases} nx^b e^{-nx^2} & \text{si} \quad 0 < x \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

   (a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \ln([u_n(x)]^{\frac{1}{n}})$, pour $x > 0$.
   (b) En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ la somme de cette série de fonctions.
   (c) Déduire de la question 1 la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x \in [0,+\infty[$.
   (d) Déterminer les valeurs de b pour que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.
   (e) On suppose maintenant que $b = 4$.
      i. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} S(x) = 1$.
      ii. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

6.2 Correction

Exercice 1. 1) Si $0 < x \leq 1$, ona $nx^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle lorsque $n \to +\infty$.
2) On cherche le maximum de la fonction f_n sur l'intervalle $[0,1]$. Pour cela, on calcule :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x)^{\alpha-1}(n-(n+\alpha)x).$$

En posant $x_n = \dfrac{n}{n+\alpha}$, on voit que f_n est croissante sur $[0, x_n]$ et décroissante sur $[x_n, 1]$. La fonction f_n atteint donc son maximum en x_n et celui-ci vaut :

$$M_n = f_n(x_n) = n\frac{1}{(1+\frac{\alpha}{n})^n}\frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha(1+\frac{\alpha}{n})^\alpha}.$$

On constate que $f_n(x_n)$ est équivalent au voisinage de $+\infty$ à $\dfrac{\alpha^\alpha}{n^{\alpha-1}e^\alpha}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 0$ si $\alpha > 1$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge donc bien uniformément vers 0 sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.
3. a) Utiliser juste le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+\alpha} = 1$. Alors $\forall\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|\dfrac{n}{n+\alpha} - 1| \leq \varepsilon$. Il suffit de prendre $\varepsilon = 1 - a > 0$.
b) On a $\sup\limits_{x\in[0,a]} f_n(x) = f_n(a)$ puisque $\dfrac{n}{n+\alpha} > a$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = 0$, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge donc bien uniformément vers 0 sur $[0,a]$

Exercice 2.

1. (a) Pour $|x| < 1$, on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{n} v_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. On fait tendre $n \to +\infty$, on voit que $H(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

   (b) La fonction v_n atteint son maximum sur $[-a,a]$ en a, *i.e.* $\sup\limits_{[-a,a]} |v_n(x)| = a^n$. Or la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ converge puisque $0 < a < 1$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a,a]$ pour tout $0 < a < 1$.

   (c) Les conditions de théorème de dérivabilité (locale) pour les séries sont satisfaites *i.e.*

      i. La série converge simplement sur $]-1,1[$,
      ii. la fonction $x \to v_n(x)$ est de classe C^1,
      iii. la série dérivée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ converge uniformément sur $[-a,a]$ pour tout $0 < a < 1$.

      Alors la fonction H est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

   (d) D'après la question (a), on sait que $H(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Donc

   $$H'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

   D'où si $|x| < 1$

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

2. (a) Pour $x > 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln([u_n(x)]^{\frac{1}{n}}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(n^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} e^{-x^2}\right) = x^2$.

(b) Pour $x > 0$ fixé, la série à termes positifs $u_n(x)$ vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n^{\frac{1}{n}}(x)} = e^{-x^2} < 1.$$

On peut donc appliquer le critère de Cauchy : la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge. Ceci étant vrai pour tout $x > 0$, on en déduit que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. En $x = 0$, la série de fonctions est nulle donc convergente de somme nulle. D'où la série converge simplement sur $[0,+\infty[$.

(c) En déduire la somme $S(x)$. D'après le question 1 (e^{-x^2} joue le rôle de x), on a

$$S(x) = \begin{cases} x^b \dfrac{e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ S(0) = 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(d) Etudions le maximum de u_n sur $]0,+\infty[$:

$$u_n'(x) = nx^{b-1}e^{-nx^2} - 2n^2x^{b+1}e^{-nx^2} = nx^{b-1}(b-2nx^2)e^{-nx^2}.$$

Donc $u_n'(x) = 0$ pour $x = x_n = \sqrt{\dfrac{b}{2n}}$. u_n admet un maximum au point x_n et $u_n(x_n) = n\left(\sqrt{\dfrac{b}{2n}}\right)^b e^{-\frac{b}{2}}$, qui est équivalent au voisinage de $+\infty$ à $\dfrac{e^{-\frac{b}{2}}}{n^{\frac{b}{2}}}$. La série numérique de terme général $\dfrac{e^{-\frac{b}{2}}}{n^{\frac{b}{2}}}$converge si et seulement si $b - \dfrac{1}{2} > 1$ c'est-à-dire $b > 4$, ce qui implique le résultat.

(e) Pour $b = 4$, i. On remarque que $(1-e^{-x^2})^2 \sim x^4$ quand $x \to 0$. Donc $S(x)$ tend vers 1 quand $x \to 0$.
ii. Ona $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x) = 1 \neq S(0)$. Par suite S n'est pas continue. La convergence ne peut pas donc être uniforme, sinon la fonction S serait continue.

6.3 Sujet

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $(x,y) \neq (0,0)$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 2 : Soit f la fonction 2π-périodique et paire définie sur $[0,\pi]$ par: $f(x) = \sin(x)$.

1. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Montrer que la série de Fourier associée à f est convergente, et calculer sa somme $SF(x)$ sur $[-\pi,\pi]$.
4. Déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}$.
5. Donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2}$.

Exercice 3 : On considère une série entière de terme général a_nx^n, de rayon de convergence $R > 0$, et de somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$. On suppose que S est une solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) - 2y(x) = 0.$$

1. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$
$$(n+2)a_{n+2} = -(n-2)a_n.$$
On suppose que $S(0) = 0$ et $S'(0) = 1$.

2. (a) Déterminer la valeur de a_0, puis de a_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Déterminer la valeur de a_1 et montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)(2p-1)}$.

3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[-1,+1]$. Que peut-on dire du rayon de convergence R de cette série.

4. Pour $x \in [-1,0[\bigcup]0,1]$, on pose $g(x) = \dfrac{S'(x)-1}{x}$ et $g(0) = 0$.

   (a) Montrer que g est continue sur $[-1,+1]$.

   (b) Vérifier que $g(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} x^{2p-1}$ et que $g(x) = \arctan(x)$ pour $x \in [-1,1]$.

5. Déduire de la question précédente que pour tout $x \in [-1,1]$, $S'(x) = x\arctan(x) + 1$, puis que $S(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2+1}{2}\arctan(x)$.

6. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$.

6.4 Correction

Exercice 1 : On calcule les limites suivantes :
$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{0}{h} = 0.$$
Donc f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et égales respectivement à 0. Si maintenant f est continue alors
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$
Mais comme $f(x,x) = \dfrac{1}{2} \neq 0$, alors on trouve une contradiction. Donc f n'est pas continue au point $(0,0)$. Finalement f peut posséder des dérivées partielles en un point sans être continue en ce point.

Exercice 2 :

1. C'est pas difficile à tracer.

2. On calcule les coefficients de Fourier de f :

On a f est une fonction paire donc $b_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a aussi si $n \neq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ & \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\sin((n+1)x)+\sin((1-n)x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{-(-1)^{n+1}+1}{n+1}+\frac{-(-1)^{1-n}+1}{1-n}\Big] \\ &= \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad n = 2p+1 \\ \dfrac{-4}{\pi(4p^2-1)} \quad \text{si} \quad n = 2p, \end{cases} \end{aligned}$$

avec $p \in \mathbb{N}$. Il est facile de voir que $a_1 = 0$.

3. On a f est de classe C^1 par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet la série $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx)$ converge vers $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x)$, puisque f est continue, d'où on a pour tout $x \in [-\pi, \pi]$

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4p^2-1)}\cos(2px) = |f(x)| = |\sin(x)|.$$

4. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1} = (\frac{2}{\pi}-1)\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

5. On a f est 2π-périodique continue par morceaux, d'après l'égalité de Parseval *i.e.*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2,$$

on obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}.$$

Exercice 3 :

1. On écrit :

$$(1+x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

ou encore, en posant $k = n-2$ dans la première somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

En rassemblant les termes de même degré, on obtient :

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = (2-n(n-1))a_n n = -(n+1)(n-2)a_n,$$

c'est-à-dire

$$(n+2)a_{n+2} = -(n-2)a_n.$$

2. (a) En prenant $n = 2$, on trouve $a_4 = 0$ donc par récurrence on trouve $a_{2p} = 0$ pour tout $p > 2$. Les conditions $S(0) = 0$ et $S'(0) = 1$ impliquent $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donc aussi $a_2 = 0$.

(b) La valeur de a_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$ se calcule par récurrence à partir de a_1 :
pour $n=1$, $a_3 = \dfrac{1}{3}$
pour $n=3$, $a_5 = -\dfrac{1}{3\times 5}$.
Supposons que jusqu'à l'ordre $2p+1$, pour $p \geq 2$ on ait :

$$a_{2p-1} = \frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p-3)},$$

alors on obtient :

$$a_{2p+1} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)(2p-1)}$$

La formule est vérifiée à l'ordre $2p+1$ et donc la récurrence est bien vérifiée. De plus on a

$$S(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} x^{2p+1}}{(2p+1)(2p-1)}.$$

3. La série entiére de terme général $a_n x^n$ est majorée sur $[-1,+1]$ par la série numérique de terme général $\dfrac{1}{(2p-1)(2p+1)}$, $p \in \mathbb{N}$ qui est une série convergente. La série entiére de terme général $a_n x^n$ converge donc normalement sur l'intervalle $[-1,+1]$. Son rayon de convergence est $R \geq 1$ puisque la série converge pour $x \in [-1,+1]$

4. (a) On pour tout $x \in [-1,+1]$ et non nul, on a g est de classe C^1, car S' est de classe C^1. De plus on a

$$\lim_{x\to 0} g(x) = S''(0) = 0 = g(0).$$

Donc g est continue sur $x \in [-1,+1]$.

(b) En dérivant terme à terme la somme de la série entiére, on peut développer la fonction pour $x \in [-1,+1]$, $x \neq 0$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{S'(x)-1}{x} \\ &= \frac{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} x^{2p}}{2p-1} - 1}{x} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} x^{2p-1}}{2p-1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p} x^{2p+1}}{2p+1} \\ &= \arctan(x) \end{aligned}$$

5. On a $g(x) = \dfrac{S'(x)-1}{x}$, donc

$$S'(x) = x\arctan(x) + 1, \quad \text{si} \quad x \neq 0,$$

et $S'(0) = 1$. Alors $S'(x) = x\arctan(x) + 1$ pour tout $x \in [-1,1]$. Par conséquent il existe une constante c telle que

$$g(x) = \int_0^x u\arctan(u)du + x + c,.$$

Comme $S(0) = 0$, alors $c = 0$. Finalement, par une intégration par parties, on obtient

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\arctan(x).$$

6. D'après la question précédente on a $S(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$. Donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

6.5 Sujet

Exercice 1 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est absolument convergente si $\alpha > 1$.

2. En utilisant un développement limité, déterminer les valeurs de α pour que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

Exercice 2 : On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ par : $u_n(x) = e^{2^{-nx}} - 1,\ n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ diverge si $x \leq 0$.

2. Donner un équivalent de e^t à l'ordre 1 au voisinage de 0. En déduire que la série de fonction $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge si $x > 0$.

3. Soit $a > 0$. Montrer que la la série de fonction $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

4. En déduire que la fonction somme $x \to S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 : Donner le rayon de convergence de la série entière suivante et exprimer sa somme au moyen des fonctions usuelles :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{sh^2(n)}{(2n)!} x^n.$$

Exercice 4 : Soit f la fonction 2π-périodique et impaire définie sur $[0, \pi]$ par: $f(x) = \sin^2(x)$.

1. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. Montrer que la série de Fourier associée à f est convergente, et calculer sa somme $SF(x)$ sur $[-\pi, \pi]$.

4. Déduire la valeur de la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p+1)(2p+3)}$.

6.6 Correction

Exercice 1 :

1. On a

$$\begin{aligned}|u_n| &= \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^{n+1}}\right| \\ &= \frac{1}{\left|n^\alpha+(-1)^{n+1}\right|} \\ &= \frac{1}{n^\alpha\left|1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right|} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}.\end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n\geq 2}|u_n|$ converge si $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha}$ qui est une série de Riemann qui converge si $\alpha>1$. La série $\sum_{n\geq 2}u_n$ converge absolument si $\alpha>1$.

2. on a par un développement limité au voisinage de 0

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}+o(\frac{1}{n^\alpha}) \\ &= v_n+w_n.\end{aligned}$$

La série de terme général v_n converge si $\alpha>0$ par le critère des séries alternées et la série de terme général w_n est une série de Riemann qui converge si $2\alpha>1$. donc pour $\alpha>\frac{1}{2}$ la série converge et si $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$, la série est la somme de deux séries une convergente et l'autre divergente donc c'est une série divergente. Pour $\alpha\leq 0$ le terme général de la série ne tend pas vers 0 et donc la série est aussi divergente.

Exercice 2 :

1. Suppsons que $x<0$, on a $u_n(x)=e^{e^{-nx\ln(2)}}-1$. Or $\lim_{n\to+\infty}2^{-nx}=\lim_{n\to+\infty}e^{-nx\ln(2)}=+\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}u_n(x)\neq 0.$$

Par suite la série de terme général $u_n(x)$ diverge si $x\leq 0$. Maintenant si $x=0$, $u_n(0)=e-1$, ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty}u_n(0)\neq 0$ et par conséquent la série de terme général $u_n(0)$ diverge aussi.

2. Si $x>0$, ona

$$u_n(x)\underset{+\infty}{\sim}2^{-nx}.$$

Or la série de terme général 2^{-nx} est une série géométrique de raison e^{-x} convergente puisque $e^{-x}<1$.

3. Soit $a>0$, on calcule la dérivéee de $u_n(x)$, on a

$$u_n'(x)=-n\ln(2)e^{-nx\ln(2)}u_n(x)\leq 0.$$

D'où $\sup_{x\in[a,+\infty[}|u_n(x)|=u_n(a)$. Donc la série de terme général $\sup_{x\in[a,+\infty[}|u_n(x)|$ converge puisque la série de terme général $u_n(a)$ est convergente d'après la question 1. Par conséquent la série converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$.

4. On applique le théorème de continuité (locale) pour les séries. On a les fonctions $x \to u_n(x)$ sont continues sur $[a,+\infty[$ et la série $\sum_n u_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$, alors par le théorème de continuité (locale) pour les séries la fonction $x \to S(x)$ est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$ donc continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3 :

1. On a
$$sh(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{2}.$$
Donc $a_n = \dfrac{(e^n - e^{-n})^2}{2(2n)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{2n}}{4(2n)!}$. Par conséquent
$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0,$$
et le rayon de convergence de la série est donc $R = +\infty$.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{sh^2(n)}{(2n)!} x^n \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2n}}{(2n)!} x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-2n}}{(2n)!} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^2x)^n}{(2n)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{-2}x)^n}{(2n)!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n\end{aligned}$$
D'où si $x \geq 0$, on obtient
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{4} ch(e\sqrt{x}) - \frac{1}{4} ch(e^{-1}\sqrt{x}) - \frac{1}{2} ch(\sqrt{x}).$$
Si $x \leq 0$, on trouve
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{4}\cos(e\sqrt{-x}) - \frac{1}{4}\cos(e^{-1}\sqrt{-x}) - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{x}).$$

Exercice 4 :

1. Calculons les coefficients de Fourier de f. Puisque la fonction f est impaire on déduit que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ & \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\frac{1-\cos(2x)}{2})\sin(nx)dx \\ &= \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad n = 2p \dfrac{-8}{\pi(2p+1)(2p+3)(2p-1)} \quad \text{si} \quad n = 2p+1, \end{cases}\end{aligned}$$
D'où la série de Fourier associée est
$$SF(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{-8}{\pi(2p+1)(2p+3)(2p-1)} \sin((2p+1)x)$$

2. On a f est de classe C^1 par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet la série $SF(x)$ converge vers $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x)$, puisque f est continue. et ona on a pour tout $x \in [-\pi, \pi]$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-8}{\pi(2p+1)(2p+3)(2p-1)} \sin((2p+1)x) = \sin^2(x).$$

3. Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on trouve que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi(2p+1)(2p+3)(2p-1)} = \frac{-\pi}{8}.$$