El Hassan Essaky
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département Maths-Info

Polycopié D'analyse II

SMA–SMI Semestre 2

First draft

Contents

Chapitre 1

Dérivation et développement limité

Dans ce chapitre, I designe un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point.
Vous avez tous déjà rencontré la notion de fonction dérivable. Le premier point de vue est celui de la cinématique : la variable t représente le temps, et $f(t)$ est la distance parcourue à l'instant t d'un point en mouvement pour $t \neq 0$, $\tau_a(t) = \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ représente la vitesse moyenne entre les instants t et a et sa limite $f'(a)$ représente la vitesse instantanée à l'instant a.
Un autre point de vue est celui de la tangente à une courbe : étant donné une fonction f définie sur I, pour $x \in I\backslash\{a\}$, la droite joignaux les points $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ a pour coefficient directeur (ou pente) $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Si f est dérivable en a, cette pente a pour limite $f'(a)$ quand x tend vers a. Autrement dit la courbe C_f de f admet une tangente non paralèlle à l'axe des coordonnées (yy') à savoir la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

1.1 Dérivées

1.1.1 Dérivé en un point

Définition 1.

Soient $a \in I$ et fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$. Cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée dérivée de f en a. f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Autre notation : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, la quantité $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelée taux d'accroissement.

Interprétation des dérivées :

• Tangente à une courbe : étant donné une fonction f définie sur I, pour $x \in I\backslash\{a\}$, la droite joignaux les points $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ a pour coefficient directeur (ou pente) $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Si f est dérivable en a, cette pente a pour limite $f'(a)$ quand x tend vers a. Autrement dit la courbe C_f de f admet une tangente non paralèlle à l'axe des coordonnées (yy') à savoir la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Remarque 1. *Si* $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$, *la courbe* C_f *de* f *admet en* A *une demi-tangente paralèlle à l'axe* (yy').

• Vitesse instantanée : lorsque $f(t)$ est l'abssice à l'instant t d'un point en mouvement pour $t \neq 0$, $\tau_a(t) = \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ représente la vitesse moyenne entre les instants t et a et sa limite $f'(a)$ représente la vitesse instantanée à l'instant a.

Exemple 1. *La fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *On a, pour tout* $x \neq a$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = x+a,$$

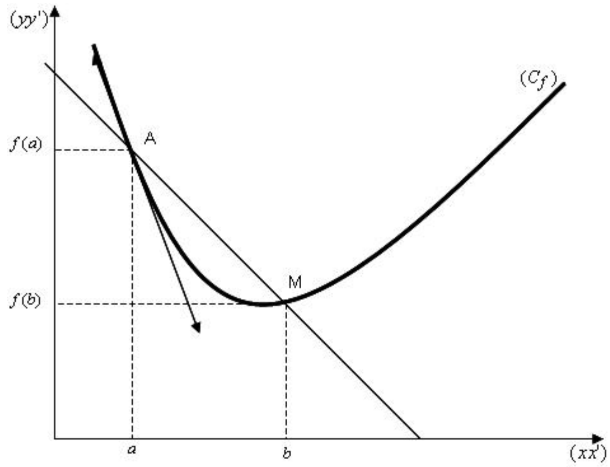


Figure 1.1: Le coefficient directeur de la tangente au point $(a, f(a))$ est le nombre $f'(a)$.

La limite de cette expression quand x tend vers a est 2a. On donc montré que

$$f'(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La tangente à la parabole $y = x^2$ au point $(a, f(a) = a^2)$ est la droite d'équation

$$y = 2a(x-a) + a^2 = a(2x-a).$$

Définition 2.

Soient $a \in I$ et fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. On dit que f est dérivable en a à droite si et seulement si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie, cette limite est alors notée $f'_d(a)$, et appelée dérivée de f à droite de a.
2. On dit que f est dérivable en a à gauche si et seulement si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie, cette limite est alors notée $f'_g(a)$, et appelée dérivée de f à gauche de a.

Exemple 2. *La fonction* $\begin{array}{rl} f : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto |x| \end{array}$ *est dérivable à gauche de 0 et dérivable à droite de 0 et* $f'_g(0) = -1$ *et* $f'_d(0) = 1$. *Mais la fonction f n'est pas dérivable en 0.*

On a alors la

Proposition 3.

Soient $a \in \overset{\circ}{I}$, $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Pour que soit dérivable en a, il faut et il suffit que f soit dérivable à gauche et à droite en a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exemple 3. *Considérons la fonction f définie par*

$$\begin{array}{rl} f : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \begin{cases} 0 \ si \ x \leq 0 \\ x^2 \ si \ x > 0. \end{cases} \end{array}$$

On a pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

si $h > 0$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = h \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0$,

si $h < 0$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = 0 \underset{h \to 0^-}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.

Proposition 4.

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Preuve. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in I$, on a

$$f(a+h) = f(a) + h\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

Comme f est dérivable en a, alors $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ et donc $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. Par conséquent, f est continue en a.

Remarque 2. *La réciproque du Proposition 4 n'est pas vraie. En effet, la fonction* $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array}$ *est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.*

Exemple 4. *1. La fonction* $\sqrt{.} : \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$ *est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0, puisque*

$\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}} \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

2. La fonction

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0, \end{cases} \end{array}$$

est continue en 0 ($|f(x)| \leq |x|$) et n'est pas dérivable en 0 $\left(\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \sin(\dfrac{1}{h})\right)$, *n'a pas de limite lorsque* $h \to 0$.

1.1.2 Propriétés algébriques des fonctions dérivable en un point

Théorème 5.

Soient $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications dérivables en a. Alors

1. $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
4. si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et $(\dfrac{1}{g})'(a) = \dfrac{-g'(a)}{(g(a))^2}$.
5. si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $(\dfrac{f}{g})'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a))}{(g(a))^2}$.

Théorème 6.

(Dérivée d'une fonction composée)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subseteq J$. On note

$$g \circ f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)), \end{array}$$

si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la définition de la dérivée.

Théorème 7.

(Dérivée d'une fonction réciproque)
Soient $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone et continue sur I, dérivable en a et telle que $f'(a) \neq 0$. Alors, la fonction réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est dérivable en $f(a)$ et on a $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Preuve. Posons $g = f^{-1}$. Il s'agit de trouver la limite du rapport

$$\frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}$$

quand y tend vers $f(a)$. On a, par définition de g, $y = f(g(y))$, on peut donc écrire

$$\frac{g(y) - g(f(a))}{f(g(y)) - f(g(f(a))}.$$

C'est donc l'inverse du taux d'accroissement de f entre $g(y)$ et $g(f(a))$. Puisque g est continue $g(y)$ tend vers $g(f(a))$ lorsque y tend vers $f(a)$. Donc ce rapport tend vers

$$\frac{1}{f'(g(f(a))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

1.2 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

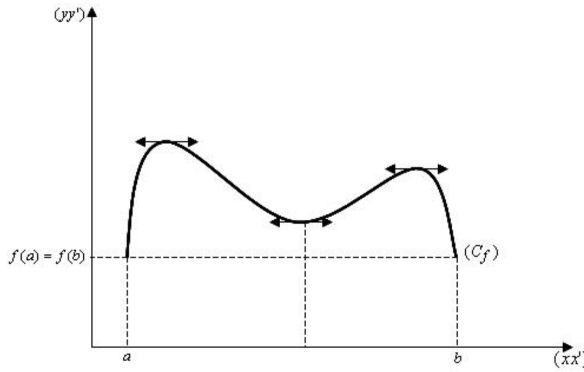
1.2.1 Théorème de Rolle

Théorème 8.

(Théorème de Rolle)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
Alors

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in]a,b[: f'(c) = 0.$$

Interprétation graphique et cinématique :
• Etant données des réelles a et b tels que $a < b$, ainsi qu'une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$, le théorème de Rolle nous dit que le graphe C_f de f possède au moins une tangente horizontale.



• En cinématique, le théorème de Rolle nous dit qu'un point mobile sur un axe qui revient à son point de départ a vu sa vitesse s'annuler à un instant donné.

Preuve du Théorème 8. Puisque f continue sur le segment $[a,b]$, f est bornée et atteint ses bornes. Notons $\sup_{x\in[a,b]} f(x) := M$ et $\inf_{x\in[a,b]} f(x) := m$.
Si $m = M$, alors f est constante, et donc $\forall x \in]a,b[, f'(x) = 0$.
Supposons que $m < M$, comme $f(a) = f(b)$, on ne peut avoir simultanément $M = f(a)$ et $m = f(a)$, et donc on peut se ramener par exemple au cas $M \neq f(a)$. Puisque f atteint M, il existe $c \in]a,b[: M = f(c)$.
Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $c+h \in [a,b]$, on a
si $h > 0$,

$$\begin{cases} c+h > c \\ f(c+h) \leq M = f(c), \end{cases}$$

donc $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$.
si $h < 0$,

$$\begin{cases} c+h < c \\ f(c+h) \leq M = f(c), \end{cases}$$

donc $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$.
Comme f dérivable en c on en déduit, en faisant tendre h vesr 0, $f'(c) \leq 0$ et $f'(c) \geq 0$ et donc finalement $f'(c) = 0$.

1.2.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 9.

(Théorème des accroissements finis)
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
Alors

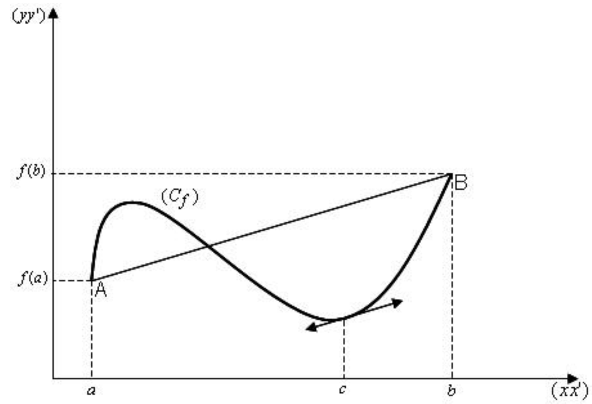
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in]a,b[: f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Preuve. Considérons la fonction $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [a,b],\ \phi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

Il est clair que ϕ est continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ et $\phi(a) = \phi(b)$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction ϕ sur $[a,b]$ on obtient l'existence d'un élément $c \in]a,b[$ tel que $\phi'(c) = 0$, *i.e.* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ■

Interprétation graphique : la conclusion du théorème des accroissements finis s'interprète graphiquement : il existe un point de la courbe representative C_f de f, d'abscisse dans $]a,b[$, en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB), où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



Corollaire 1. *(Inégalié des accroissements finis)*
Pour une fonction continûment dérivable (f et f' sont continues) sur un intervalle $[a,b], a,b \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall x,y \in [a,b],\ |f(x)-f(y)| \leq C|x-y|$$

avec $C = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Corollaire 2. *Soit f une fonction continue sur I dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors*

1. f est consatnte sur $I \Longleftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) = 0$

2. f est croissante sur $I \Longleftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \geq 0$

3. f est décroissante sur $I \Longleftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \leq 0$

Preuve. Montrons *2.*, soit $x \in \overset{\circ}{I}$. Comme f est croissante sur I, alors la rapport

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y},$$

est positif. Donc sa limite $f'(x)$ est aussi positif.
Inversement, supposons que f est dérivable de dérivée positive, si x_1 et x_2 sont deux point de I, avec $x_1 < x_2$, la fonction f est continue sur $[x_1,x_2]$, dérivable sur $]x_1,x_2[$. Le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $c \in]x_1,x_2[$ tel que

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c).$$

Or $f'(c) \geq 0$, donc $f(x_2) \geq f(x_1)$. Ce qui prouve que f est croissante.

Remarque 3. *i) Si f est dérivable sur I et si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
ii) 2. et 3. du Corollaire 2 sont utilisés dans l'étude des variations d'une fonction. Par exemple,

$$\begin{aligned} f : [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{x^2+1}, \end{aligned}$$

on a $\forall x \in [0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ et on a $f' \geq 0$ sur $[0,1]$ et donc f est croissante sur cet intervalle et $f' \leq 0$ sur $[1,+\infty[$ et donc f est décroissante sur cet intervalle. On a lors le tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

1.3 Dérivées successives et formule de Taylor

1.3.1 Dérivées successives

Définition 10.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable, alors f' est une application de I dans $\mathbb{R}$. Si f' est dérivable sur I la dérivée $(f')'$ est notée f'' et on dit que f est deux fois dérivable sur I. Pour certaines fonctions on peut définir $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}, \dots$. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$.

Exemple 5. $(x^n)^{(n)} = n!$, $\sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$.

Définition 11.

1. On dit que f est de classe C^n sur I si et seulement si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I.
2. On dit que f est de classe C^∞ sur I si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ existe et est continue sur I.

Théorème 12.

(Formule de Leibnitz)
Soient f et g deux fonctions dérivables jusqu'à l'ordre n alors fg est dérivable aussi jusqu'à l'ordre n sur I et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.3.2 Formule de Taylor

Théorème 13.

(Formule de Taylor) f est de classe C^n sur $I = [a,b]$ et $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Si $x_0 \in]a,b[$ est un point fixé, alors $\forall x \in]a,b[, x \neq 0$, il existe c compris entre x et x_0 tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

C'est la formule de Taylor de f au point x_0.

- $P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$ est dit polynôme de Taylor de degré n associé à f.
- $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est dit reste de Lagrange d'ordre n.

Remarque 4. *1. On peut aussi poser $c = x_0 + \theta(x - x_0), \theta \in]0,1[$ et la formule de Taylor devient*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),\ \theta \in]0,1[.$$

2. Pour $x_0 = 0$, la formule de Taylor porte le nom de formule de Mac-Laurin. Elle s'ecrit

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\ \theta \in]0,1[.$$

Exemple 6. *1. $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ \theta \in]0,1[.$$

2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, $f^{(n)}(0) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},\ \theta \in]0,1[.$$

1.4 Développements limités

La notion de développement limité permet d'approximer une fonction au voisinage d'un point par un polynôme. Plus l'ordre du développement est élevé meilleure est l'approximation.

1.4.1 Fonctions équivalentes

Définition 14.

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, on note $f \underset{a}{\sim} g$ au voisinage de a.

Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

1.
$$\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} f_1 \\ g \underset{a}{\sim} g_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow fg \underset{a}{\sim} f_1 g_1.$$

2. $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

3.
$$\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} f_1 \\ g \underset{a}{\sim} g_1 \end{array}\right\} \not\Rightarrow f + g \underset{a}{\sim} f_1 + g_1.$$

4.
$$\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} f_1 \\ g \underset{a}{\sim} g_1 \end{array}\right\} \not\Rightarrow f - g \underset{a}{\sim} f_1 - g_1.$$

Exemple 7. *Au voisinage de 0, on a*
$x + x^2 \underset{0}{\sim} x + x^3$ et $x \underset{0}{\sim} x$ mais $(x + x^2) - x = x^2$ n'est pas équivalent à $(x + x^3) - x = x^3$.

1.4.2 Fonctions négligeables

Définition 15.

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, on note $f = o(g)$ au voisinage de a.

Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}$, alors on a

1.
$$\left.\begin{array}{r} f = o(h) \\ g = o(h) \end{array}\right\} \Longrightarrow f + g = o(h).$$

2.
$$\left.\begin{array}{r} f = o(f_1) \\ g = o(g_1) \end{array}\right\} \Longrightarrow fg = o(f_1 g_1).$$

3. Si f est bornée au voisinage de a alors $f\,o(g) = o(g)$.
4. Si $n \leq m$ ona $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$.
5. $o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$.
6. $\lambda o(x^n) = o(x^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
7. $x^n o(x^m) = o(x^{n+m})$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$.
8. $x^{-n} o(x^m) = o(x^{m-n})$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$.

1.4.3 Développement limité d'une fonction

Définition 16.

Soit f une fonction définie au voisinage de a (sauf peut être en a). On dit que f admet un développement limité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) si et seulement si il existe un polynôme P_n de degré au plus égale n et un intervalle I contenant a tels que $\forall x \in I \backslash \{a\}$, on ait

$$f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x),$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. On note $DL_a^n f$.

$P_n(x)$ est appelé partie régulière du développement limité et $(x-a)^n\varepsilon(x)$ est son n$^{\text{ème}}$ reste.

Remarque 5. *1. Dire que f admet un développement limité à l'ordre n en a signifie qu'il existe des nombres $a_0, a_1 \ldots, a_n$ tels que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x-a) - \ldots - a_n(x-a)^n}{(x-a)^n} = 0$$

Plus n est grand meilleure est donc l'approximation de $f(x)$ par le polynôme $P_n(x-a) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$ au voisinage de a.

2. Puisque $\lim\limits_{x\to a} \frac{(x-a)^n\varepsilon(x)}{(x-a)^n}$, on peut alors écrrie

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n).$$

3. Si $a \neq 0$, on pose $t = x - a$ et on développe au voisinage de $t = 0$

4. Pour obtenir un développement limité au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, on pose $t = \frac{1}{x}$ et on développe au voisinage de $t = 0$.

Dans la suite, on suppose que $a = 0$

Remarque 6. *1. Notons* $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ *où* $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, *alors* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} P_n(x) = a_0$ *et l'existence d'un développement limité implique que* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = a_0$, *cela n'implique pas la continuité de* f *au point 0, puisque* $f(0)$ *peut ne pas exister. Cependant, si* $f(0) = a_0$ *(donc* f *continue en 0) alors on peut écrire*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^{n-1} + o(x^{n-1}), \ \forall x \in I \setminus \{0\},$$

et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 \Longrightarrow f$ *est dérivable en 0 et* $f'(0) = a_1$. *Dans ce cas l'équation de la tangente, au point* $(0, f(0))$, *à la courbe* C_f *de* f *est* $y = a_0 + a_1x$ *et la position de* C_f *par rapport à la tangente est déterminée par le signe du premier terme non nul* $a_kx^k, k \geq 2$, *si ce terme est posiif la courbe est au dessus de sa tangente si il est négatif la coube est au dessous de la tangente.*

Théorème 17.

Si f admet un DL_n^0, alors il est unique.

Théorème 18.

Si une fonction f admet un DL_n^0, est paire (resp. impair) sa partie régulière ne comporte que des monômes de degré pair (resp. impair).

Exemple 8.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Théorème 19.

(Formule de Taylor (1685-1731)-Young (1862-1946))
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $a \in I$. Si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n sur I, la fonction f admet un DL_n^a donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a^n)).$$

Exemple 9. *1. La fonction* f *définie par* $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *admet un* DL_0^n *donné par*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

2. En utilisant la formule précédente on en déduit que le DL_0^n *de la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x}$ *:*

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

1.4.4 Développements limités en 0 des fonctions usuelles (voir complément)

1.5 Opéartions sur le développement limité

1.5.1 Développement limité de la somme et le produit de deux fonctions

Proposition 20.

On suppose que $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$.
1. Si $h(x) = f(x) + g(x)$ alors $h(x) = (P_n + Q_n)(x) + o(x^n)$
2. $h(x) = (fg)(x)$ alors $h(x) = R_n(x) + o(x^n)$, avec $R_n(x)$ est le Polynôme de degré inférieur ou égale à n, obtenu du produit P_nQ_n en supprimant tous les termes de degré strictement supérieur à n.

Exemple 10. *Cherchons le DL_0^3 de la fonction $h(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}} = f(x)g(x)$:*
On a

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

D'où

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})(1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{6}x^3) + o(x^3).$$

Mais pour obtenir un DL_0^3, le produit P_nQ_n doit être tranqué au degré 3, ce qui donne

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = 1 + (1 - \frac{1}{2})x + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8})x^2 + (\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{5}{6})x^3 + o(x^3).$$

Finalement

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3).$$

1.5.2 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 21.

On suppose que $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$. Si $h(x) = g \circ f(x)$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ alors

$$h(x) = Q_n \circ P_n(x) + o(x^n),$$

où $Q_n \circ P_n$ ne contenant que les termes de degré au plus égale n.

Exemple 11. *Trouver le DL_0^4 de la fonction $h(x) = e^{\cos(x)}$.*
Posons $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = e^x$. Or $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0$. Pour appliquer la proposition 21, On nécrit alors $h(x) = e^{1+\cos(x)-1} = ee^{\cos(x)-1}$. En posant maintenant $f(x) = \cos(x) - 1$ et $g(x) = e^x$, on a

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

alors

$$h(x) = e(1 + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4)) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4)^2 + o(x^4).$$

Soit en tranquant à l'ordre 4,

$$h(x) = e^{\cos(x)} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4).$$

1.5.3 Développement limité d'un quotient

Proposition 22.

On suppose que $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$. Si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, alors

$$h(x) = C_n(x) + o(x^n),$$

où C_n est obtenu en divisant suivant les puissance croissantes à l'ordre n la partie régulière P_n de f par la partie régulière Q_n de g.

Exemple 12. *Trouver le DL_0^5 de la fonction* $\tan(x)$.
On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$*, en divisant suivant les puissance croissantes à l'ordre* 5 *la partie régulière de* $\sin(x)$ *par la partie régulière de* $\cos(x)$*, on a alors*

$$\begin{array}{c|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2}
-x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\ \cline{1-1}
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\
-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} & \\ \cline{1-1}
\frac{2x^5}{15} & \\
-\frac{2x^5}{15} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

D'où

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Chapitre 2

L'intégrale de Riemann

Dans ce chapitre, On présentera une construction plus théorique et rappeller (ou démontrer) les principales propriétés de ce type de calcul. Pour cela, on commence par s'intéresser à des fonctions étagées (fonctions en escalier) pour lesquelles on va définir l'intégrale et vérifier ses principales propriétés. Puis on généralisera cette construction à une classe de fonctions plus large (dite intégrables) qui contient toutes les fonctions usuelles (en particulier les fonctions continues).

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 23.

i) On appelle subdivision de l'intervalle $[a,b]$, un ensemble fini de points $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

ii) Le nombre $h = \max\limits_{0\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})$ est appelé le pas de la subdivision.

iii) Une subdivision σ_0 est dite plus fine que σ, si l'ensemble σ_0 contient σ. (plus fine = plus de points). Le pas de la subdivision σ_0 est donc plus petit que celui de σ.

Exemple 13. *La famille $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ où $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, ..., n$, définit une subdivision de $[a,b]$ de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$. La famille $\sigma' = \{x_0', x_1', ..., x_{2n}'\}$ où $x_i' = a + i\dfrac{b-a}{2n}$, $i = 0, ..., 2n$, de pas $h = \dfrac{b-a}{2n}$ est plus fine que σ.*

Définition 24.

i) Une application $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier si et seulement s'il existe une subdivision $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ et un ensemble de nombres $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ tels que,

$$\forall k \in \{1, ..., n\},\ \forall x \in]x_{k-1}, x_k[,\ f(x) = \lambda_k.$$

ii) On dira que la subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est adaptée à la fonction en escalier f si f est constante sur chacun des intervalles $]x_{k-1}, x_k[$. Toute subdivision plus fine que σ est encore adaptée à f.

On notera $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a,b]$.

Définition 25.

Soit f une fonction en escalier définie sur $[a,b]$. Si $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, et si, pour k compris entre 1 et n, on appelle λ_k la valeur prise par la fonction f sur $]x_{k-1}, x_k[$. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - x_{k-1}).$$

On le note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Interprétation graphique. $\lambda_k(x_k - x_{k-1})$ représente l'aire du rectangle de base $(x_k - x_{k-1})$ et de hauteur λ_k. $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire algébrique entre la représentation graphique de la fonction en escalier f et l'axe des abscisses.

Proposition 26.

1) Si f est constante sur $[a,b]$ et vaut λ, alors $I(f) = \lambda(b-a)$.
2) Si f est positive, alors $I(f)$ est positive, car tous les termes de la somme sont positifs.
3) Si $a \leq c \leq b$, en introduisant le point c dans la subdivision, on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(Avec la convention $\int_a^a f(x)dx = 0$).
4) Si f et g sont deux fonctions en escalier définies sur $[a,b]$, et si μ est un nombre réel, alors on a $I(f+g) = I(f)+I(g)$ et $I(\mu f) = \mu I(f)$. L'application I est donc linéaire sur $\mathcal{E}([a,b])$.
5) Si $f \leq g$, alors $I(f) \leq I(g)$, car $I(g) - I(f) = I(g-f) \geq 0$.

2.2 Intégrale des fonctions au sens de Riemann

Soit f une fonction bornée, il existe donc un nombre M, tel que, pour tout x de $[a,b]$, on ait $-M \leq f(x) \leq M$. Notons

$$\mathcal{I}_+(f) = \{I(G) | G \in \mathcal{E}([a,b]), G \geq f\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide car il contient $I(M) = M(b-a)$. D'autre part, si G est une fonction en escalier telle que $G \geq f$, on a aussi $G \geq -M$, et donc $I(G) \geq -M(b-a)$. L'ensemble $\mathcal{I}_+(f)$ est donc minoré. Il possède une borne inférieure. On note $I_+(f)$ cette borne inférieure, qui est appelée intégrale supérieure de f. De même, si l'on pose

$$\mathcal{I}_-(f) = \{I(g) | g \in \mathcal{E}([a,b]), g \leq f\}.$$

le même raisonnement montre que cet ensemble n'est pas vide et est majoré (par $M(b-a)$). Sa borne supérieure existe. On note $I_-(f)$ cette borne supérieure, qui est appelée intégrale inférieure de f. Donc

$$I_+(f) = \inf_{\substack{G \in \mathcal{E}([a,b]) \\ G \geq f}} I(G) = \inf(\mathcal{I}_+(f)) \text{ et } I_-(f) = \sup_{\substack{g \in \mathcal{E}([a,b]) \\ g \leq f}} I(g) = \sup(\mathcal{I}_-(f))$$

Remarquons en particulier, que si $g \leq f \leq G$, et si g et G sont en escalier, alors $I(g) \leq I(G)$, donc $I(G)$ majore $\mathcal{I}_-(f)$, et il en résulte que $I_-(f) \leq I(G)$. Mais cela signifie que $I_-(f)$ minore $\mathcal{I}_+(f)$, donc $I_-(f) \leq I_+(f)$. Enfin, si f est une fonction en escalier, $I(f)$ appartient à $\mathcal{I}_-(f)$ et est un majorant de cet ensemble, il appartient aussi à $\mathcal{I}_+(f)$ et est un minorant de cet ensemble, donc $I(f) = I_+(f) = I_-(f)$.

Définition 27.

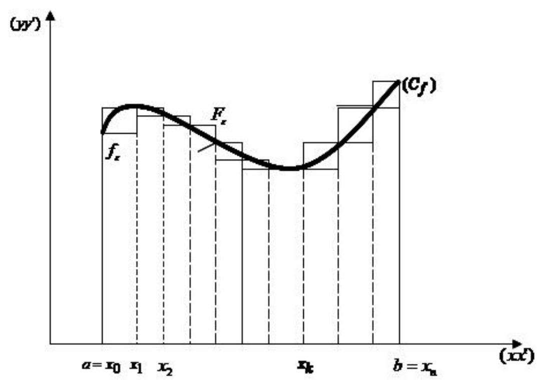
On dira qu'une fonction f est intégrable au sens de Riemann ou Riemann-intégrable, si l'on a $I_+(f) = I_-(f)$. On notera alors $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, la valeur commune.

En particulier, d'après ce qui précède, une fonction en escalier est Riemann-intégrable.

Théorème 28.

Une fonction bornée f est Riemann-intégrable, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver, des fonctions en escalier f_ε et F_ε, telles que

$$f_\varepsilon \le f \le F_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (F_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x))dx < \varepsilon.$$



Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe F_ε en escalier majorant f telle que

$$I_+(f) \le I(F_\varepsilon) < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par définition de la borne supérieure, il existe f_ε en escalier minorant f telle que

$$I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2} < I(f_\varepsilon) \le I_-(f).$$

On en déduit

$$0 \le I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2} - (I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2}).$$

Donc, si f est Riemann-intégrable,

$$I(F_\varepsilon - f_\varepsilon) = I(F_\varepsilon) - I(f_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Réciproquement, si l'on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ des fonctions en escalier f_ε et F_ε, telles que $f_\varepsilon \le f \le F_\varepsilon$ et $\int_a^b (F_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x))dx < \varepsilon$, on a en particulier, quel que soit ε

$$I(f_\varepsilon) \le I_-(f) \le I_+(f) \le I(F_\varepsilon),$$

donc

$$0 \le I_+(f) - I_-(f) \le I(F_\varepsilon - f_\varepsilon) < \varepsilon.$$

On en déduit que $I_+(f) - I_-(f) = 0$, donc que f est Riemann-intégrable.

Proposition 29.

Une fonction bornée f est Riemann-intégrable, si et seulement si, on peut trouver, deux suites $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(F_n)_{n\geq 0}$ de fonctions en escalier, telles que, pour tout entier n on ait $f_n \leq f \leq F_n$ et vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b (F_n(x)-f_n(x))dx = 0.$$

Dans ce cas

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b F_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Proposition 30.

1) Si f et g sont deux fonctions en escalier définies sur $[a,b]$, et si μ est un nombre réel, alors on a $I(f+g) = I(f)+I(g)$ et $I(\mu f) = \mu I(f)$. L'application I est donc linéaire sur $\mathcal{E}([a,b])$.
2) Si f est Riemann-intégrable et positive, alors $I(f)$ est positive.
3) Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, alors si $f \leq g$, on a $I(f) \leq I(g)$.
4) Si f une fonction définie sur $[a,b]$ Riemann-intégrable, et $a \leq c \leq b$, on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(Avec la convention $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$).

Preuve. 1. Soit f et g intégrables au sens de Riemann. Il existe alors quatre suites de fonctions en escaliers $(f_n),(F_n),(g_n),(F_n)$ telles que, pour tout entier n

$$f_n \leq f \leq F_n \quad \text{et} \quad g_n \leq g \leq G_n,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} I(F_n-f_n) = \lim_{n\to+\infty} I(G_n-g_n) = 0.$$

Alors

$$f_n+g_n \leq f+g \leq F_n+G_n,$$

Les fonctions f_n+g_n et F_n+G_n sont en escalier, et

$$\lim_{n\to+\infty} I((F_n+G_n)-(f_n+g_n)) = \lim_{n\to+\infty} I(F_n-f_n) + \lim_{n\to+\infty} I(G_n-g_n) = 0.$$

Il en résulte que $f+g$ est Riemann-intégrable, et que

$$I(f+g) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n+g_n) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n) + \lim_{n\to+\infty} I(g_n) = I(f)+I(g).$$

2) $I(0) = 0$ appartient alors à $\mathcal{I}\_(f)$, donc $I\_(f) = I(f)$ est positif.
3) On a $g-f \geq 0$, donc $I(g-f) \geq 0$, mais $I(g-f) = I(g)-I(f)$, donc $I(f) \geq I(g)$.

2.3 Intégrale d'une fonction continue

Théorème 31.

Toute fonction numérique continue sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Preuve. La fonction f étant continue sur le segment $[a,b]$ elle est bornée et uniformément continue sur cet intervalle. Soit n un entier strictement positif, il existe $\eta > 0$ tel que $|x-y| \leq \eta$, implique $|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{n}$. Choisisons p entier tel que $p > \frac{(b-a)}{\eta}$, et posons, si $0 \leq k \leq p$, $x_k = a + k\frac{b-a}{p}$. On obtient ainsi une subdivision $\{x_0, x_1, ..., x_p\}$ de $[a,b]$, telle que $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{p}$. Par ailleurs, sur $[x_{k-1}, x_k]$ la fonction continue f atteint sa borne supérieure en un point ξ_k et sa borne inférieure en un point ν_k. On définit deux fonctions en escalier f_n et F_n en posant, si x appartient à $[x_{k-1}, x_k[, F_n(x) = f(\xi_k)$ et $f_n(x) = f(\nu_k)$, et $F_n(b) = f_n(b) = f(b)$. On a alors $f_n \leq f \leq F_n$. Comme ξ_k et ν_k appartiennent à l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, on a $|\xi_k - \nu_k| \leq \frac{b-a}{p} \leq \eta$, et donc $0 \leq f(\xi_k) - f(\nu_k) \leq \frac{1}{n}$. Alors

$$0 \leq I(F_n - f_n) = \sum_{k=1}^{p} (f(\xi_k) - f(\nu_k))\frac{b-a}{p} \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n}\frac{b-a}{p} \leq \frac{b-a}{n}.$$

Cette suite converge donc vers zéro, et il en résulte que f est Riemann-intégrable.

Proposition 32.

Si f est continue, il en est de même de $|f|$, et $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Preuve. Puisque $-|f| \leq f \leq |f|$, on en déduit $-I(|f|) = I(-|f|) \leq I(f) \leq I(|f|)$, ou encore, puique $I(|f|)$ est positif $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Proposition 33.

(Inégalité de la moyenne)
Si f est continue

$$|I(f)| \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Preuve. Si M désigne un majorant de $|f|$, on a $|f| \leq M$, donc $|I(f)| \leq I(|f|) \leq I(M) = M(b-a)$.

2.4 Intégrale indéfinie

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si c appartient à $[a,b]$, on définit une fonction F sur $[a,b]$ en posant

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Cette intégrale est appelée intégrale indéfinie de f. On a alors le théorème fondamental du calcul intégral :

Théorème 34.

Soit f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors la fonction F définie sur $[a,b]$ en posant

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,$$

est dérivable sur $[a,b]$ et, pour tout x_0 de $[a,b]$, on a

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

2.5 Primitive d'une fonction continue

Définition 35.

On appelle primitive d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ toute fonction f dérivable dont la dérivée est f, *i.e.* $\forall x \in [a,b], F'(x) = f(x)$.

Proposition 36.

Si F est une primitive de f, alors toute fonction G de la forme $G(x) = F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est encore primitive de f.

Preuve. Sur I, on a $(F-G)' = 0$. Comme $[a,b]$ est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [a,b],\ G(x) = F(x) + C.$$

Notation : Suivant l'usage dû à Leibniz, on note $\int f(x)dx$ l'ensemble des primitives de f. On écrit par exemple

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

D'après le théorème 34, on le résulat suivant

Théorème 37.

i) Toute fonction continue sur $[a,b]$ possède des primitives sur cet intervalle.
ii) Pour toute primitive G de f dans $[a,b]$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

2.6 Calcul de primitives

2.6.1 Changement de variable

Théorème 38.

Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $\phi([a,b])$, alors

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Preuve. Soit F une primitive de f sur $\phi([a,b])$. La fonction $f \circ \phi.\phi'$ est la dérivée de $F \circ \phi$ et elle continue sur $[a,b]$ car $f \circ \phi$ et ϕ' le sont. Par conséquent

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = F\circ\phi(b) - F\circ\phi(a) = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Exemple 14. *Calculer l'intégrale* $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\cosh(x)}$.

On a $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, *alors* $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$. *Posons* $t = e^x$, *alors* $dt = e^x dx$ *(ici* $\phi : x \longmapsto e^x$ *qui est bien de classe* C^1 *sur* $[0,1]$*). D'où*

$$J = \int_1^e \frac{2}{t^2+1} dt = [2\arctan t]_1^e = 2\arctan e - \frac{\pi}{2}.$$

2.6.2 Intégration par parties

La règle de dérivation du produit fg conduit à :

Théorème 39.

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Exemple 15. *Calculer* $J = \displaystyle\int_0^x t\sin t dt$. *On a J est sous la forme* $\displaystyle\int_0^x f(t)g'(t)dt$, *où* $f(t) = t$ *et* $g'(t) = \sin t$. *Alors,*

$$J = [-t\cos t]_0^x - \int_0^x (-\cos t)dt = -x\cos x + \sin x.$$

2.6.3 Intégration d'une fraction rationnelle

Soit à calculer $J = \displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(s)}$, où $P(x), Q(x)$ sont des fonctions polynômes. On décompose la fraction en éléments simples, c'est à dire qu'elle se présente sous la forme d'éléments de 3 types suivants :

<u>1^{er} type</u> : $a_n x^n, a_n \in \mathbb{R}$ alors

$$\int a_n x^n dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{constante}.$$

<u>$2^{\text{ème}}$ type</u> : $\dfrac{\alpha}{(x-a)^n}, \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Si $n > 1$, alors

$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^n} dx = \frac{\alpha}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + \text{constante}.$$

Si $n = 1$,

$$\int \frac{\alpha}{x-a} dx = \alpha \ln|x-a| + \text{constante}.$$

<u>$3^{\text{ème}}$ type</u> : $g(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{(x^2+\gamma x+\delta)^n}, (\gamma, \delta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4, n \in \mathbb{N}^*$, et $\Delta = \gamma^2 - 4\delta < 0$. On a

$$x^2 + \gamma x + \delta = (x + \frac{\gamma}{2})^2 + \delta - \frac{\gamma^2}{4} = -(x + \frac{\gamma}{2})^2 - \frac{\Delta}{4} = -\frac{\Delta}{4}(1 + (\frac{2x+\gamma}{\sqrt{-\Delta}})^2)$$

Le changement de variable $t = \dfrac{2x+\gamma}{\sqrt{-\Delta}}$ conduit au calcul des primitives suivantes :

$$I_n = \int \frac{2t}{(1+t^2)^n} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

On obtient alors

$$I_n = \frac{1}{n-1}\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} \quad \text{si} \quad n > 1,$$

et

$$I_n = \ln|1+t^2| \quad \text{si} \quad n = 1.$$

La fonction J_n se calcule par une formule de récurrence obtenue par une intégration par partie. On a alors

$$J_1 = \arctan t \quad \text{et} \quad J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}J_n + \frac{t}{2n(1+t^2)^n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2.6.4 Intégration d'une fraction rationnelle en sinus et cosinus

En général, on fait le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ et on utilise les relations

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \ \text{ et } \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

On obtient l'intégrale d'une fraction rationnelle en t qu'on sait déjà calculer.
Dans certains cas particulier, il suffit de faire les changements de variables : $t = \sin x, t = \cos x$ ou $t = \tan x$.

Exemple 16. *Calculer* $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x}$. *On pose* $t = \tan x$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, *alors*

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{1+3t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\sqrt{3}dt}{1+(\sqrt{3}t)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

Chapitre 3

Intégrales généralisées

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle de bornes a et b, non nécessairement fermé et non nécessairement borné. On se propose d'étudier quand on peut donner un sens à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Lorsque cela sera possible on parlera alors d'intégrale généralisée.

Définition 40.

Soient $J = [a, b[$ et f une fonction continue sur $J = [a, b[$. Si la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge. Lorsque F a une limite (finie ou non) en a on note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$.

Remarque 7. *Si f est continue sur $[a, b[$ et si G est une primitive de f, on a $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$, il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si G possède une limite finie en b. On notera lorsqu'il en est ainsi $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = [G(x)]_a^b$.*

Proposition 41.

(Relation de chasles) Soit $a < c < b$. Si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Si l'une des deux premières intégrales diverge, la dernière diverge.

Remarque 8. *Comme pour une intégrale de Riemann, nous poserons, si $a > b$*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

lorsque cette dernière intégrale. converge.

En raison de la linéarité de l'intégrale de Riemann, on a

Proposition 42.

Soit f et g des fonctions continues sur $J = [a,b[$, et λ un nombre réel non nul. Si les intégrales de f et de g convergent, il en est de même de celle de $f+g$ et

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Si une des deux intégrales diverge, l'intégrale de $f+g$ diverge. L'intégrale de λf converge si et seulement l'intégrale de f converge et alors $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

Proposition 43.

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b[$. Alors, si l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ converge, et si uv possède une limite en b, l'intégrale $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ converge et

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \lim_{x\to b} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Proposition 44.

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. Soit φ une application strictement monotone de classe C^1 sur $[\alpha,\beta[$. Posons $b = \lim_{x\to\beta} \varphi(x)$, et $a = \varphi(\alpha)$. Alors les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$ sont de même nature, et si elles convergent, ou si elles ont une limite infinie, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$$

3.1 Intégrale généralisée d'une fonction positive

Théorème 45.

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ et positive. Si l'on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, La fonction F est croissante sur $[a,b[$, et l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si F est majorée. De plus, pour tout x de $[a,b[$

$$F(x) \leq \int_a^b f(t)dt.$$

Preuve. Si f est positive, on a, si $a \leq u < v < b$,

$$F(v) - F(u) = \int_u^v f(t)dt \geq 0,$$

et la fonction F est donc croissante. Elle admet une limite finie ou non en b. Si la limite est finie l'intégrale converge, et l'on a, pour tout x de $[a, b[$,

$$F(x) \leq \int_a^b f(t)dt,$$

sinon elle diverge. Dans ce cas, dire que l'intégrale converge revient à dire que la fonction F est bornée.

Théorème 46.

(Principe de comparaison)
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, positives telles que $f(x) \leq g(x)$, $\forall < x \in [a, b[$. Alors si l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$ converge, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge, l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

Preuve. Si l'on a $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour $a \leq x < b$, posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. On a alors, si $a \leq x < b$, l'inégalité $F(x) \leq G(x)$. Si $\int_a^b g(x)dx$ converge et l'on a, si $a \leq x < b$, $F(x) \leq G(x) \leq \int_a^b g(x)dx$. La fonction F est croissante majorée. Alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge, alors $\lim_{x \to b^-} F(x) = +\infty$, et donc $\lim_{x \to b^-} G(x) = +\infty$. Cela signifie que $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

Théorème 47.

Soient f et g deux applications définies sur $[a, b[$, à valeurs positives, continues sur $[a, b[$, telles que la fonction $\frac{f}{g}$ admette le réel l pour limite à gauche en b.

1) Si $l \neq 0$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
2) Si $l = 0$ (autrement dit si $f = o_b(g)$) alors la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ implique la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.

Preuve. Puisque les fonctions f et g sont positives sur $[a, b[$ alors $l \geq 0$.
Supposons que $\lim_{t \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, c'est à dire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0\ \forall x \in [a, b[\ (0 < b - x \leq \eta \Longrightarrow |\frac{f(x)}{g(x)} - l| \leq \varepsilon).$$

Prenons $\varepsilon = \frac{l}{2}$, $\exists \eta_l > 0 : \forall x \in [a, b[\cap [b - \eta_l, b[$ on ait

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - l| \leq \varepsilon.$$

Cela implique $\forall x \in [\min(a, b-\eta_l), b[$ on ait

$$\frac{l}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3l}{2}g(x).$$

D'après le prinicipe de comparaison on résultat.

3.2 Intégrales de comparaison

Pour pouvoir utiliser les théorèmes précédents, il faut connaître la nature d'intégrales de fonctions simples, qui serviront d'intégrales de comparaison.
Intégrales de Riemann

Théorème 48.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha \leq 1$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, diverge si $\alpha \geq 1$.

Il suffit de calculer une primitive de la fonction et de regarder si cette primitive a une limite en $+\infty$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : x \longrightarrow \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Si $\alpha \neq 1$, une primitive de f_α est $F_\alpha : x \longrightarrow \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. Or F_α admet une limite en 0 ssi $\alpha < 1$ et une limite en $+\infty$ si $\alpha > 1$. Par ailleurs une primitive pour $x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ est $x \longrightarrow \ln(x)$ qui n'admet de limite ni en 0 ni en $+\infty$.
Intégrale de Bertrand
Ces intégrales de comparaisons sont utiles à retenir, non seulement pour le résultat mais aussi pour la méthode utilisée pour l'obtenir.

Théorème 49.

1. $\forall a > 1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\beta(\ln x)^\alpha}$ converge si $\beta > 1, \alpha \in \mathbb{R}$ ou si $\beta = 1, \alpha > 1$.
1. $\forall a \in]0, 1[$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\beta \mid \ln x \mid^\alpha}$ converge si $\beta < 1, \alpha \in \mathbb{R}$ ou si $\beta = 1, \alpha > 1$.

3.3 Intégrales absolument convergentes

Soit f une fonction continue sur $J = [a, b[$. La fonction |f| est également continue sur $J = [a, b[$. On peut donc se poser le problème de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$.

Définition 50.

On dira que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge absolument si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.

Théorème 51.

Soit f une fonction continue sur $J = [a, b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, alors elle converge. De plus

$$| \int_a^b f(x)dx | \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Remarque 9. *la convergence absolue d'une intégrale entaine sa convergence.*

Théorème 52.

(Critère de convergence absolue)
Soit f une application continue sur $[a, b[$. S'il existe une application φ à valeurs positives, continue sur $[a, b[$ telle que

1. $\int_a^b \varphi(x)dx$ converge
2. $| f(x) | \leq \varphi(x), \forall x \in [a, b[$, alors

$\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente.

Exemple 17. *Soit a un nombre réel. Considérons la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *par* $f_a(x) = \dfrac{\sin ax}{x^2}$ *, on a* $|f_a(x)| \leq \dfrac{|\sin ax|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$. *Comme l'intégrale de Riemann* $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2} dx$ *converge, il résulte du critère de comparaison que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} |f_a(x)|dx$ *converge, donc que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f_a(x)dx$ *converge absolument, et finalement que cette intégrale converge.*

3.4 Intégrales semi-convergentes

Définition 53.

Nous dirons qu'une intégrale est semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

Nous admettons le résultat suivant :

Théorème 54.

(Critère d'Abel)
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
1. f est positive, décroissante sur $[a,+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$,
2. il existe $M>0$ tel que $\forall x\in[a,+\infty[$,

$$\left|\int_a^x g(x)dx\right| \le M$$

alors $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ est convergente.

Chapitre 4

Equations différentielles

4.1 Equations différentielles du premier ordre

Définition 55.

On appelle équation différentielle du premier ordre, toute relation de la forme

$$F(x, y, y') = 0, \tag{4.1}$$

où F est une fonction de trois variables (x, y, y'), x est la variable réelle et y' est la dérivée par rapport à x de la fonction inconnue y que l'on cherche. De telles fonctions y sont dites solution de (4.1).

Exemple 18. *$(y')^2 + y' = 3y - x$ est une équation différentielle du premier ordre. La fonction F de la définition étant définie par $F(x, y, z) = z^2 + z - 3y + x$.*

Définition 56.

La solution générale de (4.1) représente toutes les solutions de (4.1) et tout exemple de fonction y qui vérifie (4.1) est dite solution particulière de (4.1).

Exemple 19. *$y' + 2xy = 0$ est une équation différentielle du premier ordre, sa sloution générale est*

$$y = Ce^{-x^2}, \ C \in \mathbb{R}.$$

$y_1 = e^{-x^2}, \ y_2 = 2e^{-x^2}, \ y_3 = 3e^{-x^2}$... sont des solutions particulières de l'équation.

4.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

4.2.1 Solutions d'une équations différentielle linéaire du premier ordre

Définition 57.

une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{4.2}$$

où a, b et c sont des fonctions de la varaiable x. $c(x)$ est appelée second membre de l'équation (4.2).

Définition 58.

On appelle équation différentielle linéaire sans second membre (on dit aussi équation homogène) associée à (4.2) l'équation différentielle

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{4.3}$$

où a, b et c sont des fonctions de la varaiable x. $c(x)$ est appelée second membre de l'équation (4.2).

Proposition 59.

i) Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation différentielle sans second membre (4.3) alors $y_1 + y_2$ et αy_1 sont solutions de (4.3).
ii) Si y_2 est une solution de l'équation différentielle linéaire (4.2) alors $y_1 - y_2$ est solution de l'équation sans second membre associée si et seulement si y_1 est aussi solution de (4.2).

Preuve. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (4.3) alors

$$a(x)(y_1 + y_2)' + b(x)(y_1 + y_2) = a(x)y_1' + b(x)y_1 + a(x)y_2' + b(x)y_2 = 0.$$

$$a(x)(\alpha y_1)' + b(x)(\alpha y_1) = \alpha(a(x)y_1' + b(x)y_1) = 0.$$

Donc $y_1 + y_2$ (resp. αy_1) est solution de (4.3).
Supposons maintenant que y_2 est une solution de équation différentielle linéaire (4.2) et que $y_1 - y_2$ est solution de l'équation sans second membre associée, il vient

$$a(x)y_2' + b(x)y_2 = c(x) \quad \text{et} \quad a(x)(y_1 - y_2)' + b(x)(y_1 - y_2) = 0,$$

ce qui donne que

$$a(x)y_1' + b(x)y_1 = a(x)y_2' + b(x)y_2 = c(x),$$

et donc y_1 est aussi solution de (4.2).
Réciproquement, supposons y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire (4.2), alors trivialement $y_1 - y_2$ est solution de l'équation sans second membre associée.

Remarque 10. *Les solutions S' de l'équation (4.3) forment un espace vectoriel et les solutions S de l'équation (4.2) forment un espace affine de direction S', i.e. $S = \{a + f | f \in S'\}$, où a est un élément quelconque de S.*

La proposition précédente peut s'écrire :

Théorème 60.

La solution générale d'une équation différentielle linéaire est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Exemple 20. *Soit à résoudre l'équation linéaire $y' + y = e^x$ $(*)$.*
La solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est $y = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. D'autre part $y = \frac{1}{2}e^x$ est une solution particulère de $(*)$. D'où

$$y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x, \ C \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de $(*)$.

Une méthode qui permet de trouver une solution particulère de l'équation sans second membre est la :

4.2.2 Méthode de la variation de la constante

Pour résoudre les équations différentilles linéaires du premier ordre, on commnence tout d'abord par résoudre l'équation sans second membre , on trouve alors une famille de solutions de la forme $Kf(x)$ où K est une constante qui appartient à $\mathbb{R}$ et f une solution non nulle l'équation sans second membre. On cherche ensuite une solution de l'équation différentielle avec second membre sous la forme $K(x)f(x)$. Le problème est alors revient à déterminer la fonction $K(x)$.

Exemple 21. *Soit à résoudre l'équation* $xy' - 2y = x^3 \ln x$ $(*)$.
On commence par résoudre l'équation sans second membre sur $\mathbb{R}^*$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x},$$

les solutions sont donc de la forme $y = Kx^2$*, où* K *est une constante réelle. Pour résoudre l'équation avec second membre on fait "varier la constante" et l'on cherche une solution de la forme* $y = K(x)x^2$*. En rempalçant dans l'équation* $(*)$ *il viendra*

$$x(K'(x)x^2 + 2xK(x)) - 2(K(x)x^2) = x^3 \ln x.$$

L'équation $(*)$ *devient alors*

$$K'(x) = \ln x.$$

Ce qui donne que $K(x) = x(\ln|x| - 1) + C$*,* $C \in \mathbb{R}$*. D'où l'on déduit que les solutions de* $(*)$ *sont données par*

$$y(x) = (x(\ln|x| - 1) + C)x^2,$$

C *est une constante réelle quelconque.*

4.3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 61.

une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{4.4}$$

où a $(a \neq 0)$, b et c sont des consatantes réelles et f est une fonction. L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.5}$$

est appelée l'équation sans second membre associée à l'équation (4.4) (dite aussi équation homogène).

Théorème 62.

La solution générale d'une équation différentielle linéaire du second membre est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre.

4.3.1 Résolution de l'équation homogène

Théorème 63.

Les solutions de (4.5) forment un espace vectoriel de dimension 2, on appelle équation caractéristique associée à l'équation (4.5) l'équation $ar^2 + br + c = 0$, soient r_1 et r_2 ses racines. Trois cas sont possibles :
1. r_1 et r_2 sont deux racines réelles distinctes alors les solutions de (4.5) sont les fonctions de la formes

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.
2. Si l'équation caractéristique possède une racine réelle double ($r_1 = r_2$), alors les solutions de (4.5) sont les fonctions de la formes

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.
3. r_1 et r_2 sont deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_1 = \alpha - i\beta$, alors les solutions de (4.5) sont les fonctions de la formes

$$y(x) = e^{\alpha x}\Big(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\Big),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

Preuve. Il est clair que si r_1 est une racine de l'équation caractéristique, la fonction définie par $y_1(x) = e^{r_1 x}$ est solution de l'équation (4.5). Soit h une fonction, posons $z(x) = h(x)e^{-r_1 x}$, soit $h = zy_1$. h est solution de l'équation (4.5) si et seulement si

$$a(z''y_1 + 2y_1'z' + zy_1'') + b(z'y_1 + zy_1') + czy_1 = 0.$$

Donc h est solution si et seulement si

$$az''y_1 + (2ay_1'z' + by_1)z' + z(ay_1'' + by_1' + cy_1) = 0.$$

Comme y_1 est solution de l'équation (4.5) alors

$$az''y_1 + (2ay_1' + by_1)z' = 0,$$

qui est une équation du premier ordre en z' que l'on résoud en utilisant le fait que $y_1' = r_1 y_1$ et $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$. D'où

$$\frac{z''}{z'} = r_2 - r_1.$$

Finalement h est solution de l'équation (4.5) si et seulement si

$$z' = Ke^{(r_2 - r_1)x},\ K \in \mathbb{R}.$$

1. Si les racines sont distinctes $r_2 \neq r_1$, alors $z = C_1 e^{(r_2-r_1)x} + C_2$ et donc $h(x) = (C_1 e^{(r_2-r_1)x} + C_2)e^{r_1 x} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$. D'où $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
2. Si les racines sont doubles $r_2 = r_1$, $z = C_1 x + C_2$ et donc $h(x) = (C_1 x + C_2)e^{r_1 x}$ et $y(x) = (C_1 x + C_2)e^{r_1 x}$.
3. Si les racines sont complexes il suffit de prendre la partie réelle.

Exemple 22. *Résoudre les équations différentielles homogènes du second ordre*
1. $2y'' - y' - y = 0 \quad (1)$
2. $y'' - 2y' + y = 0 \quad (2)$
3. $y'' + y = 0 \quad (3).$

1. L'équation caracteristique associée est $2r^2 - r - 1 = 0$. *On calcule son déscriminant* $\Delta = 1 + 8 = 9$. *L'équation admet donc deux racines réelles distictes* $r_1 = 1$ *et* $r_2 = -\frac{1}{2}$. *Alors les solutions de l'équation* (1) *sont de la forme*

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

4.3.2 Résolution de l'équation avec second ordre et second membre de la forme $P(x)e^{mx}$

Soit à résoudre l'équation

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{mx}, \tag{4.6}$$

où P est un polynôme et m donné. Le principe est de chercher une solution prticulière de la même forme que le second membre, c'est à dire $y_p = Q(x)e^{mx}$ où Q est un polynôme à déterminer. On alors

$$y_p' = (Q'(x) + mQ(x))e^{mx}, \quad y_p'' = (Q''(x) + 2mQ'(x) + m^2 Q(x))e^{mx}.$$

D'où

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = \Big(aQ''(x) + (2ma + b)Q(x) + (am^2 + bm + c)Q(x)\Big)e^{mx}.$$

y_p est alors solution de (4.6) si et seulement si

$$aQ''(x) + (2ma + b)Q(x) + (am^2 + bm + c)Q(x) = P(x).$$

On discute alors les trois cas suivants :
1. Si $am^2 + bm + c \neq 0$ (m n'est pas une solution de l'équation caractérstique $ar^2 + br + c = 0$), on cherchera à l'aide des coefficients indéterminés un polynôme Q de même degré que P.
2. Si $\begin{cases} am^2 + bm + c = 0 \\ 2ma + b \neq 0 \end{cases}$, ($m$ est une solution de l'équation caractérstique $ar^2+br+c = 0$), on devra chercher un polynôme Q de degré $degP + 1$ vérifaint $aQ''(x) + (2ma + b)Q(x) = P(x)$.
3. Si $\begin{cases} am^2 + bm + c = 0 \\ 2ma + b = 0 \end{cases}$, ($m$ est une racine double de l'équation caractérstique $ar^2 + br + c = 0$), on devra chercher un polynôme Q de degré $degP + 2$ vérifaint $aQ''(x) = P(x)$.

Exemple 23. *Résoudre* $y'' + y = xe^x \quad (*)$.
L'équation caractérstique est $r^2 + 1 = 0$. *La solution générale de l'équation sans second membre* $y'' + y = 0$ *est de la forme*

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p = Q(x)e^x$. *Ici* $m = 1$ *n'est pas une racine de l'équation caractérstique* $r^2 + 1 = 0$. *On cherche alors* Q *tel que* $degQ = degP = 1$. *Posons* $Q(x) = ax + b$. *On a* $Q'(x) = a$ *et* $Q''(x) = 0$. *On doit alors avoir*

$$2a + 2(ax + b) = x,$$

soit $a = \frac{1}{2}$ *et* $b = -\frac{1}{2}$. *La solution générale de l'équation* $(*)$ *est alors*

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})e^x, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 1. *Résoudre* $y'' + y = \cos x \quad (*)$.

Remarque 11. *(Principe de superposition)*
Si le second membre $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ *avec* $f_i, 0 \le i \le n$ *est de type* $P_i(x)e^{m_i x}, 0 \le i \le n$ *et si* ψ_i *est la solution particulière de l'équation*

$$ay'' + by' + cy = f_i(x),$$

alors $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)$ *est une solution particulière de (4.6).*

Chapitre 5

Exercices

Exercice 1 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2\sin(\frac{1}{x})$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, on note $\widetilde{f}$ la fonction prolongée. Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que $(\widetilde{f})'$ n'est pas continue en 0.

Exercice 2 Déterminer $a,b\in\mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}\quad\text{si}\quad 0\le x\le 1\quad\text{et}\quad f(x)=ax^2+bx+1\ \text{ sinon,}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 Soient x et y deux réels avec $x<y$.

1. Montrer que : $e^x<\dfrac{e^y-e^x}{y-x}<e^y$.

2. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$\alpha\mapsto f(\alpha)=e^{(\alpha x+(1-\alpha)y)}-\alpha e^x-(1-\alpha)e^y.$$

   a. Montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $f'(c)=0$.

   b. Etudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0,1]$. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$.

   c. Déduire que

$$(1)\quad \forall x,y\in\mathbb{R},\ \forall\alpha\in[0,1],\ f(\alpha)\le 0.$$

   L'inégalité (1) s'exprime en disant que la fonction exponentielle est une fonction convexe.

3. Montrer que, pour tous réels $p>1$ et $q>1$, tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, et tous réels $a>0$ et $b>0$, on a

$$ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

4. Soit $x=(x_1,...,x_m)$ et $y=(y_1,...,y_m)$ deux élément non nuls de $\mathbb{R}^m$. Prouver que

$$\left|\sum_{i=1}^m x_iy_i\right|\le\sum_{i=1}^m|x_iy_i|\le\|x\|_p\|y\|_q.$$

   où $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^m|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.
   Cette inégalité est appelée inégalité de Hölder, aussi appelée pour $p=q=2$ inégalité de Cauchy-Schwartz.

Exercice 4

1. Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction $h:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$.
   Soit $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]a,b[$.

2. Montrer que : $\forall x\in[a,b[,\quad g(x)\neq g(b)$. (Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.)

3. Posons $p = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4. Soit $x \in [a,b[$, montrer qu'il existe un nombre réel $c(x) \in]x,b[$ tel que
$$\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

5. On suppose que $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, où l est un nombre réel.

   a. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x \in]a,b[\ (0 < b-x \leq \eta \Longrightarrow |\dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))} - l| \leq \varepsilon)$.

   b. En déduire que : $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = l$.

   Ce résultat est connu sous le nom de "*Théorème de l'Hôpital*".

6. *Application* : Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 5

1. Montrer que
$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\dfrac{1}{x})^x$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   a. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\ln(n+1) < S_n < 1 + \ln n$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 6

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$ telle que $f'(1) = -f(0)$ et $f(1) = 0$. On définit une fonction g sur $[0,1]$ par :
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x-1} & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ -f(0) & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un nombre $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c-1}$.

Exercice 7

1. Montrer que
$$\forall x > 0,\ \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} < e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} < \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}})$.

2. Montrer que, pour tous réels x et y de l'intervalle $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$|\sin x - \sin y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|x-y|.$$

3. Montrer que, pour tous réels x et y inférieurs à 1 on a

$$|e^x - e^y| \leq e|x-y|.$$

Exercice 8 Montrer que f définie par $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ n'est pas deux fois dérivable bien qu'elle admette un développement limité d'ordre 2.

Exercice 9

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\arctan x + 2\ln(1+x)}{\sin x}.$$

En déduire que f se prolonge par continuité en 0.

2. Montrer que son prolongement est dérivable en 0, et faire l'étude locale de la fonction au voisinage de zéro. (Equation de la tangente, position de la courbe par rapport à la tangente.)

Exercice 10

1. Effectuer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$f(x) = ln\left(\frac{e^{x+cosx} - e}{x+x^2}\right).$$

En déduire que f se prolonge par continuité en 0.

2. Montrer que son prolongement est dérivable en zéro, et faire l'étude locale de la fonction au voisinage de zéro. (Equation de la tangente, position de la courbe par rapport à la tangente.)

Exercice 11 Calculer le développement limité à l'ordre 3 en zéro de la fonction f définie par

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Exercice 12 Calculer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de la fonction f définie par

$$\frac{e^{e^x} - e^{e^{-x}}}{\ln(1+x)}.$$

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur [0, 3] par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ -x+2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(t)dt$.

2. Soit $x \in [0,3]$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,3]$.

Exercice 14

Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme $u'f'(u)$

$$a.\ \frac{1}{x^2+1} \qquad b.\ \frac{e^x}{e^{2x}+1} \qquad c.\ \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \qquad d.\ \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$
$$e.\ \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \qquad f.\ \frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}} \qquad g.\ \frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}} \qquad h.\ \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}.$$

Exercice 15

Calculer une primitive des fonctions suivantes en utilisant une intégration par parties

$$a.\ \frac{1}{49-4x^2} \qquad b.\ \frac{5x-12}{x(x-4)} \qquad c.\ \frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)} \qquad d.\ \frac{6x-11}{(x-1)^2}.$$
$$e.\ \frac{-19x^2+50x-25}{x^2(3x-5)\sqrt{x}} \qquad f.\ \frac{x-1}{x^2+x+1} \qquad g.\ \frac{1}{(x^2+4x+5)^2} \qquad h.\ \frac{1}{(x^2+1)^3}.$$

Exercice 16

Calculer une primitive des fonctions suivantes

$$a.\ x^2e^{-x} \qquad b.\ e^{3x}\cos 2x \qquad c.\ \arctan x \qquad d.\ \arcsin x.$$
$$e.\ \sin x \ln\cos x \qquad f.\ x^3e^{x^2} \qquad g.\ x^3 sh\, x \qquad h.\ x^3\cos x^2.$$

Exercice 17

Calculer une primitive des fonctions suivantes

$$a.\ \sin^4 x \qquad b.\ \tan^3 x + 2\tan^2 x \qquad c.\ \frac{\sin x}{\cos x(\cos x-1)} \qquad d.\ \frac{1}{2\cos x}$$
$$e.\ \frac{1}{4\sin x - 3\cos x} \qquad f.\ \frac{2\cos^3 x}{\sqrt{1+\sin x}} \qquad g.\ \frac{2\sin x}{\sqrt{1+\sin x}} \qquad h.\ \frac{1}{\cos^4 x}.$$

Exercice 18

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul on a $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$. En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$ on a

$$I_{2p} = \frac{\pi P_1(p)}{2P_2(p)} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{P_2(p)}{P_1(p+1)},$$

où $P_1(p) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ et $P_2(p) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k)$.

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \le \cos^n t \le \cos^{n-1} t$. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

4. Montrer que la suite de terme général $u_p = \dfrac{I_{2p-1}}{I_{2p}}$ converge vers 1. En déduire la formule de Wallis,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}\right]^2 = \pi.$$

5. Montrer que la suite de terme général $w_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est une suite constante. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 19

Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in [a,b]$

$$f(a+b-t) = f(t).$$

Montrer que

$$\int_a^b t f(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt.$$

Application: Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\cos t \sin t}{\sin^4 t + \cos^4 t}dt.$$

Exercice 20

Déterminer la nature et la valeur des intégrales généralisées suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t^2}\,dt \qquad 2. \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|\,1-t^2\,|}}\,dt$$

Exercice 21

Démontrer le théorème suivant :

Théorème : *Soient f et g deux applications définies sur $[a,b[$, à valeurs positives, localement intégrables sur $[a,b[$, telles que la fonction $\dfrac{f}{g}$ admette le réel l pour limite à gauche en b.*

1) Si $l \neq 0$ alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

2) Si $l = 0$ (autrement dit si $f = o_b(g)$) alors la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ implique la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Application : Déterminer les valeurs des réels α et β pour lesquelles les intégrales généralisées

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\ln(1+t)}{t^{\beta}}\,dt \qquad 2. \int_a^{+\infty} \frac{dx}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\,dt \qquad \text{avec} \qquad a > 1,$$

convergent.

Exercice 22

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt \qquad 2. \int_0^{+\infty} \cos t \left(\frac{\sin t}{t} \right)^3 dt.$$

Exercice 23

Le but de cet exercice est de montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. Montrer que I est une intégrale généralisée convergente.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}] \quad e^{-t^2} \geq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n}.$$

3. En considérant le changement de variable $t = \sqrt{n} \sin x$ montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} I_{2n+1}.$$

4. En considérant le changement de variable $t = \sqrt{n} \tan x$ montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} I_{2n-2}.$$

5. En déduire que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 24

Soit $a > 0$. On définit sur $[a, +\infty[$ les fonctions f et g par

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$.
2. Etablir que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est semi-convergente.
3. Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f(x) - g(x))dx$ n'est pas convergente.
4. En déduire $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ n'est pas convergente. Conclure.

Exercice 25

Déterminer suivant les valeurs du paramètre α la nature de l'intégrale généralisée

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\, dt.$$

2- Déterminer la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{2t+1}{\sqrt{(t-1)(t^4+1)}}\, dt.$$

Exercice 26

Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est semi-convergente.
1- Montrer que I est une intégrale généralisée convergente.
2- Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \sin^2 t$. En déduire que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt,$$

est divergente. Conclure.

Exercice 27

Soient les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2 \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt.$$

1. Montrer que F et G sont continues définies sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F'(x) + G'(x) = 0$, $\forall x > 0$ et en déduire que $F(x) + G(x) = \dfrac{\pi}{4}$, $\forall x > 0$.
3. Montrer que $|G(x)| \leq \dfrac{\pi}{4} e^{-x^2}$, $\forall x > 0$ et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 28

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour $n \geq 1$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_0^n e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la suite de fonctions $(F_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F_n est de classe C^1 et que la suite $(F_n')_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on déterminera.
3. Montrer que F satisfait l'équation différentielle $2F'(x) + xF(x) = 0$ et en déduire la valeur de F.

Exercice 29

On considère la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout entier n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. Montrer que pour tout réel t strictement positif fixé, l'application $g_t : x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow t^{x-1}$ est convexe. En déduire que l'application Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
5. Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 30

On considère la fonction réelle de la variable réelle $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $D =]0, +\infty[$.
2. Montrer que F est strictement décroissante sur D.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

4.

a. Soit $A > 0$. Démontrer que $\lim_{x \to 0^+} \int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^A \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

b. Montrer que $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} dt = +\infty$.

c. En déduire la limite de F en 0^+.

Exercice 31

On définit, pour $x \geq 0$, la fonctione $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

1.

a. Démontrer que F est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b. Démontrer que F est de C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On pose $k = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Montrer que f vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad F'(x) - F(x) = \frac{-k}{\sqrt{x}}.$$

2. Pour $x \geq 0$, on pose $G(x) = ke^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

a. Montrer que G vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. En déduire que F et G sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$ et retrouver la valeur de k.

Exercice 6

1. Montrer que pour tout $x > 0$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^x} dt$ est convergente. On note $f(x)$ sa valeur.
2. Soit $x > 0$. Montrer que $f(x) = \cos 1 + x \sin 1 - x(x+1) f(x+2)$.
3. Montrer que f est continue sur $[2, +\infty[$. En déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$.
4. Majorer $| f |$ sur $[2, +\infty[$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 32

On considère les fonctions F et G définies par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} dt.$$

1. Déterminer les ensembles de définition de F et G. Etudier la parité de ces deux fonctions.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) =| x | F(1)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, ona $0 \leq F(x) - G(x) \leq \frac{\pi}{2}$. En déduire un équivalent de G au voisinage de $+\infty$.

Exercice 33

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes, en cherchant une solution particulère du même type que le second membre

$a.\quad y' - 3y = 2$ $\qquad b.\quad y' + 2y = e^{2x}$ $\qquad c.\quad y' - 5y = e^{5x}$

$d.\quad y' - 3x^2 y = x^2$ $\qquad e.\quad y' + 3x^2 y = x^2$ $\qquad f.\quad y' - y = \sin x.$

Exercice 34

On consière l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - 2xy = 1. \tag{5.1}$$

Résoudre, sur $]-1, 1[$, l'équation différentielle (5.1).
b) Déterminer la solution qui pour $x = 0$ prend la valeur 1.
c) Résoudre, sur $]-\infty, -1[$, l'équation différentielle (5.1).
d) Que se passe-t-il lorsque $x = -1$

Exercice 35

a) Résoudre chacune des équations différentielles suivantes
a) $y'' - 5y' + 6y = 0$ *b)* $y'' - 3y = 0$ *c)* $y'' - 2y' + 2y = 0$

Exercice 36

Résoudre chacune des équations différentielles

$a.\quad y'' + 2y' - 8y = e^{3x}$ $\qquad b.\quad y'' - 3y' - 18y = xe^{4x}$ $\qquad c.\quad y'' - 10y' + 41y = \sin x$

$d.\quad y'' + 2y' - 3y = (x+1)e^{x}$ $\qquad e.\quad y'' + 4y' = \cos 2x$ $\qquad f.\quad y'' - 2y' + y = (x+1)e^{x}.$

Exercice 37

Résoudre, sur $\mathbb{R}$, chacune des équations différentielles

a) $y'' - 2y' + 2y = 1$

b) $y'' - 2y' + 2y = \cos 2x$

c) $y'' - 2y' + 2y = \sin^2 x.$