El Hassan Essaky
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département Maths-Info

Polycopié D’analyse I

SMA–SMI Semestre 1

First draft

Contents

Chapitre 1

Les nombres réels

1.1 Introduction

Rappelons qu'on note $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ l'ensemble des entiers naturels. L'absence d'éléments de $\mathbb{N}$ dont la somme avec 1, ou avec 2, ... donne 0 conduit à la construction de l'ensemble $\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ des entiers relatifs. Ensuite, l'absence d'éléments de $\mathbb{Z}$ dont le produit avec 2, ou avec 3,... donne 1 amène à la construction de l'ensemble $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*\}$ des nombres rationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est entièrement satisfaisant pour toutes les opérations algébriques de base : addition, soustraction, multiplication, division. En revanche, il se révèle inadéquat lorsqu'on essaye de résoudre une équation comme $x^2 = 2$. En fait, le nombre $\sqrt{2}$, défini comme la solution positive de cette équation, n'est pas un nombre rationnel. Pour combler cet lacune de $\mathbb{Q}$, d'ailleurs il y en a d'autres, les mathématiciens ont construit un ensemble plus riche appelés "ensemble des nombres réels" et noté $\mathbb{R}$. La première construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{R}$ est due à Karl Weierstrass (1863). Celle-ci fut relayée par deux constructions simultanées, la première publiée par Georg Cantor et Eduard Heine utilisant la notion de suites de Cauchy, la deuxième élaborée par Richard Dedekind considérant les nombres réels comme des coupures dans l'ensemble $\mathbb{Q}$.

1.2 L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Nous admettons le résultat suivant :

Théorème 1.

Il existe un ensemble $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres réels muni d'une addition +, d'une multiplication . et d'une relation d'ordre $\leq$ possédant les propriétés suivantes :
P1. $(\mathbb{R},+,.)$ est un corps commutatif contenant $\mathbb{Q}$
P2. $\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$
P3. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} a \leq b \Longrightarrow a+c \leq b+c \\ a \leq b \text{ et } c \geq 0 \Longrightarrow a.c \leq b.c. \end{cases}$$

P4. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure. Cette propriété est appelée propriété de la borne supérieure.

En résumé : $(\mathbb{R},+,.)$ est un corps commutatif contenant $\mathbb{Q}$, totalement ordonné et vérifiant la propriété de la borne supérieure.

La suite consiste à expliquer chaque notion introduite dans le théorème.
Rappelons que :
P1. $(\mathbb{R},+,.)$ est un corps commutatif signifie :
(A1) + est associative : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, (a+b)+c = a+(b+c)
(A2) + est commutative : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, a+b = b+a
(A3) $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour +, noté 0, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a+0 = 0+a = a$.
(A4) Tout élément a de $\mathbb{R}$ admet un opposé, noté $-a$, $\forall a \in \mathbb{R}, a+(-a) = (-a)+a = 0$.
(A5) . est associative : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, (a.b).c = a.(b.c)
(A6) . est commutative : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, a.b = b.a
(A7) $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour ., noté 1, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a.1 = 1.a = a$.
(A8) Tout élément a de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ admet un inverse, noté a^{-1}, $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$.

(A9) . est distributive sur l'addition :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a.(b+c) = a.b + a.c \\ (b+c).a = b.a + c.a \end{cases}$$

P2. <u>$\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$ signifie :</u>
• $\leq$ est réflexive : $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq a$
• $\leq$ est antisymétrique :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \left.\begin{matrix} a \leq b \\ b \leq a \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a = b$$

• $\leq$ est transitive :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \qquad \left.\begin{matrix} a \leq b \\ b \leq c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a \leq c$$

• l'ordre est total : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b,\ \text{ou}\ b \leq a)$.

Exercice 2.

1. Montrer que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \leq b \Rightarrow a - b \leq 0$.
2. En utilisant les axiomes algébriques pour les nombres réels montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $0.x = 0$ et $(-1).x = -x$. En déduire que $(-1).(-1) = 1$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} 0.x &= 0 + 0.x\ \textbf{(A3)} \\ &= (x + (-x)) + 0.x\ \textbf{(A4)} \\ &= (-x + x) + 0.x\ \textbf{(A2)} \\ &= -x + (x + 0.x)\ \textbf{(A1)} \\ &= -x + (1.x + 0.x)\ \textbf{(A7)} \\ &= -x + ((1+0).x)\ \textbf{(A9)} \\ &= -x + (1.x)\ \textbf{(A3)} \\ &= -x + x\ \textbf{(A7)} \\ &= 0\ \textbf{(A4)}. \end{aligned}$$

Pour pouvoir expliquer la quatrième propriété de $\mathbb{R}$, on a besoin de définir les notions suivantes :

1.3 Majorant, minorant, borne inférieure et supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 3.

Etant donné une partie A non vide de $\mathbb{R}$ et un élément $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un :
1. majorant de A dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall a \in A, \quad a \leq x$.
2. minorant de A dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall a \in A, \quad x \leq a$.
3. plus grand élément de A si et seulement si $x \in A$ et x est un majorant de A dans $\mathbb{R}$. Cet élément, s'il existe, est alors noté $\max(A)$.
4. plus petit élément de A si et seulement si $x \in A$ et x est un minorant de A dans $\mathbb{R}$. Cet élément, s'il existe, est alors noté $\min(A)$.

Définition 4.

Etant donné une partie A non vide de $\mathbb{R}$ et un élément $x \in \mathbb{R}$. On dit que A est majorée (resp. minorée) dans $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe au moins un majorant (resp. minorant) de A dans $\mathbb{R}$.
A est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 1. 1) *Toute partie finie non vide a un plus petit et un plus grand élément.*
2) $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{Z}$ *n'ont pas de plus grand ni de plus petit élément.*
3) $\mathbb{N}$ *a un plus petit élément à savoir 0.*

Définition 5.

Etant donné une partie A non vide de $\mathbb{R}$.
i) On appelle borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$ le plus petit des majorants de A dans $\mathbb{R}$, s'il existe, cet élément est alors noté $sup(A)$, i.e.

$$\forall a \in A, a \leq x \Longleftrightarrow sup(A) \leq x.$$

ii) On appelle borne inférieure de A dans $\mathbb{R}$ le plus grand des minorants de A dans $\mathbb{R}$, s'il existe, cet élément est alors noté $inf(A)$, *i.e.*

$$\forall a \in A, x \leq a \Longleftrightarrow x \leq inf(A).$$

Exemple 2. *Le rationnel 0 est la borne inférieure de la partie* $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ *dans* $\mathbb{Q}$.
Preuve. *Il est clair que 0 est un minorant de A. Il suffit donc de montrer que 0 est le plus grand des minorants. Soit* $a > 0$, *on peut écrire* $a = \frac{p}{q}$, *avec p et q entiers strictement positifs. De plus, on a* $a > \frac{1}{2q}$ *et* $\frac{1}{2q} \in A$. *Donc, quelque soit le nombre* $a > 0$, *a n'est pas un minorant de A et donc 0 est le plus grand des minorants de A.* ■

On a les caractérisations suivantes

Théorème 6.

Etant donné une partie A non vide de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1. $\alpha = sup(A)$

2. $\begin{cases} i)\forall a \in A, a \leq \alpha \\ ii)\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A, \text{ tel que } \alpha - \varepsilon < b. \end{cases}$

La propriété *2.i)* signifie que α est un majorant et *2.ii)* signifie que α est le plus petit des majorants.
Preuve du Théorème 6. *1.* $\Longrightarrow$ *2.* Supposons que $\alpha = \sup(A)$. C'est donc un majorant de A. Supposons par l'absrude que La propriété *2.ii)* n'est pas vraie, *i.e.* il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall b \in A$, $b \leq \alpha - \varepsilon$. $\alpha - \varepsilon$ est donc un majorant de A strictement plus petit que α ce qui est absurde.
2. $\Longrightarrow$ *1.* Supposons par l'absurde que $\alpha \neq \sup(A)$. Comme α est un majorant de A, alors $\sup(A) < \alpha$. Prenons $\varepsilon = \alpha - \sup(A) > 0$. Or, par hypothèse, il existe $b \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < b$. D'où $\alpha - \varepsilon = \alpha - (\alpha - \sup(A)) = \sup(A) < b$ et $\sup(A)$ est un majorant de A. Ce qui est absurde. ■

Théorème 7.

Etant donné une partie A non vide de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1. $\alpha = inf(A)$

2. $\begin{cases} i)\forall a \in A, \alpha \leq a \\ ii)\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A, \text{ tel que } b < \alpha + \varepsilon. \end{cases}$

Théorème 8.

Etant donné une partie A non vide de $\mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
1. α est une borne supérieure (resp. inférieure) de A et appartient à A

2. α est le plus grand (resp. plus petit) élément de A.

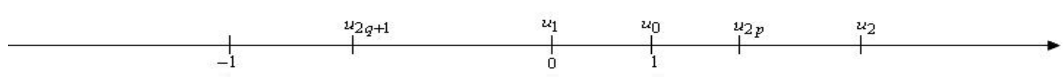
Preuve. *1.* $\Longrightarrow$ *2.* Supposons que $\alpha = \sup(A)$ et $\alpha \in A$. Donc α est un majorant et $\alpha \in A$. D'où α est le plus grand élément de A.
2. $\Longrightarrow$ *1.* Supposons que α est le plus grand élément de A. Donc α est un majorant et $\alpha \in A$. Il suffit donc de montrer que α est le plus petit des majorants. Soit alors $\varepsilon > 0$, comme $\alpha \in A$, on a $\alpha - \varepsilon < \alpha$ et $\alpha \in A$. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in A$, tel que $\alpha - \varepsilon < \alpha$. Par conséquent, α est le plus petit des majorants. ∎

Exemple 3. *Considérons l'ensemble A des nombres réels de la forme*

$$A = \{u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

On voit que l'on a

$$\begin{cases} u_{2p} = 1 + \dfrac{1}{2p},\ p > 0 \\ u_{2q+1} = -1 + \dfrac{1}{2q+1},\ q \geq 0. \end{cases}$$



On voit aussi que pour tout élément u_n de A, on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}.$$

Donc l'ensemble A est borné, c'est à dire à la fois majoré et minoré. De plus le nombre réel $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ est le plus grand élément de A puisque $\frac{3}{2}$ est un majorant et $\frac{3}{2} \in A$. Par le Théorème 8, on déduit que $\frac{3}{2}$ est une borne supérieure de A. Dans ca cas, on a

$$\sup(A) = \frac{3}{2} \text{ et } \frac{3}{2} \in A.$$

D'une autre part, on a -1 est un minorant de A. Pour montrer que -1 est une borne inférieure, il suffit de montrer que -1 est le plus grand des minorants. Soit alors $\varepsilon > 0$, pour avoir $u_{2q+1} < -1 + \varepsilon$, il suffit de prendre $2q + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ ce qui est toujours possible, donc -1 est la borne inférieure de A. Dans ca cas, on a

$$\inf(A) = -1 \text{ et } -1 \notin A.$$

Remarque 1. *L'exemple précédent montre que la borne supérieure ou la borne inférieure d'un ensemble, lorsqu'elle existe, peut appartenir ou ne pas appartenir à l'ensembe.*

Les deux propriétés suivantes semblent très naturelles, mais sont difficiles à démontrer

Théorème 9.

($\mathbb{R}$ est Archimédien).
(P) : Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n > 0$ tel que $na > b$.

En d'autre termes, même si a est petit, mais strictement positif, et que b est grand, un multiple suffisament grand de a sera plus grand que b.
Preuve du théorème 9. Supposons par l'absurde que la propriété (P) n'est pas vraie, *i.e.*

$$\exists a > 0, \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \ na \leq b.$$

Alors la partie $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ de $\mathbb{R}$ est alors non vide et majorée par b. Soit α sa borne supérieure. Comme $\alpha - a < \alpha$, $\alpha - a$ n'est pas un majorant de A, il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $ma > \alpha - a$. Donc $m(a+1) > \alpha$ et $m(a+1) \in A$, ce qui contredit le fait que α est un majorant de A. Alors $nonP$ est fausse et donc (P) est vraie. ■

En utilisant Théorème 9 on peut montrer le

Théorème 10.

(Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)
Si $a < b$, il existe un rationnel r tel que $a < r < b$.

Remarque 2. *En considérant l'ensemble A des rationnels strictement compris entre a et b, i.e. $A = \{r \in \mathbb{Q} : a < r < b\}$, on motre que A est infini. On en déduit alors que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.*

1.4 La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Introduisons l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ défini par $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On prolonge d'une facon naturelle l'ordre de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en décidant que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-\infty < x < +\infty$. Puis, on prolonge l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ par les règles suivantes :

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty,$$

$$x.(+\infty) = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \text{ si } x > 0 \\ -\infty \text{ si } x < 0, \end{array} \right. x.(-\infty) = \left\{ \begin{array}{l} -\infty \text{ si } x > 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$$

et enfin que

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \ (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \ (+\infty).(+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty).(-\infty) = +\infty, \ (+\infty).(-\infty) = -\infty.$$

On prolone aussi la notion d'inverse en posant $\dfrac{1}{+\infty} = 0 = \dfrac{1}{-\infty}$.
On remarquera que n'ont pas été définis la somme $(+\infty)+(-\infty)$ et les produits $(+\infty).0$ et $(-\infty).0$. Donc cet ensemble n'est plus un corps.
Remarquons que $+\infty$ est un majorant de toute partie A non vide de $\mathbb{R}$ Par conséquent

$$\sup(A) = +\infty \quad \text{si } A \text{ n'est pas majorée}$$

et de aussi
$$\inf(A) = -\infty \quad \text{si } A \text{ n'est pas minorée}$$

La propriété de la borne supérieure s'énonce comme suit :
Toute partie A non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1.5 Intervalles de $\mathbb{R}$

Donnos tout d'abord une définition de la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 11.

Une partie I de $\mathbb{R}$ est appelée intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall x \in I, \forall y \in I, \forall t \in \mathbb{R}\, (x \leq t \leq y \Longrightarrow t \in I).$$

Soient alors a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On vérifie que les ensembles suivants sont des intervalles de $\mathbb{R}$:
1. $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$, encore noté $[a, b]$
2. $\{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$, encore noté $]a, b]$
3. $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$, encore noté $[a, b[$
4. $\{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, encore noté $]a, b[$
5. $\{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$, encore noté $]-\infty, b]$
6. $\{x \in \mathbb{R}, x < b\}$, encore noté $]-\infty, b[$
7. $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$, encore noté $[a, +\infty[$
8. $\{x \in \mathbb{R}, a < x\}$, encore noté $]a, +\infty[$,

ainsi que d'ailleurs $\emptyset$, $\{a\}$ et $\mathbb{R}$. On peut démontrer, en utilisant la propriété de la borne supérieure (et de la borne inférieure), que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est nécessairement de l'un des 11 types ci-dessus.

Définition 12.

i) Un intervalle est dit ouvert si et seulement si il est de l'un des cinq types suivants:
$$\emptyset, \mathbb{R},]a, +\infty[,]-\infty, b[,]a, b[.$$

ii) Un intervalle est dit fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.

Remarque 3. *i) Les intervalles $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés et ce sont les seuls possèdant cette propriété.*
ii) les segments de $\mathbb{R}$ sont les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$.

1.6 Valeur absolue

Définition 13.

On appelle valeur absolue d'un nombre réel x le nombre réel $|x|$ défini par
$$|x| = sup(x, -x).$$

Le nombre réel $|x|$ est donc positif. C'est le plus grand des deux nombres x et $-x$. Donc

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

Il en résulte de la définition la proposition suivante

Proposition 14.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$|x| = |y| \Longleftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-|x| \leq x \leq |x|$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, on a
$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

On a aussi les propriétés fondamentales suivantes

Théorème 15.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a
P1. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
P2. $|xy| = |x||y|$
P3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire)
P4. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Preuve. *P1.* Si $x = 0$ alors $|x| = 0$. Si $|x| \neq 0$, on a $x < 0$ ou $x > 0$ donc $|x| \neq 0$.
P2. Cherchons la valeur absolue du produit xy de deux réels quelconques. Le nombre $|xy|$ est le plus grand des deux nombres xy et $-xy$. Or $-(xy) = (-x)y = x(-y)$ et $xy = (-x)(-y)$. Donc $|xy|$ est égale à ceux des produits $xy, (-x)y, x(-y)$ et $(-x)(-y)$ qui sont positifs. Or $|x| = sup(x, -x)$ et $|y| = sup(y, -y)$, donc $|x||y|$ est égale à $xy, (-x)y, x(-y)$ et $(-x)(-y)$ qui sont positifs. On a alors $|xy| = |x||y|$.
P3. On a $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$. Donc

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Par application du Proposition 14, on a alors le résultat.
P4. En appliquant l'inégalité triangualire, on a

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

Ce qui implique que

$$|x| - |y| \leq |x - y| \tag{1.1}$$

De même, on trouve que

$$-|x - y| = -|y - x| \leq |x| - |y|. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2), on trouve le résultat.

1.7 Partie entière

Proposition-Definition 1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ unique tel que $n \leq x < n + 1$, n est appelé la partie entière de x et noté $E(x)$ ou $[x]$.*

Remarque 4. *Utiliser essentiellement l'encadrement de la défintion de $E(x)$*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1, \text{ ou encore } x - 1 < E(x) \leq x,$$

et ne pas perdre de vue que $E(x)$ est un entier.

Chapitre 2

Les suites réelles

2.1 introduction

Pendant longtemps, les mathématiciens ont manipulé des suites et des fonctions en se contentant de la definition intuitive de la limite, sans rencontrer de problème particulier. Puis, ils sont tombés sur des propriétés, où l'intuition les a conduits à des contradictions. Ils ont alors commencé à critiquer le manque de rigueur en Analyse, et ils ont ressenti le besoin de se donner des définitions précises. D'Alembert écrit en 1765 : *On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut s'approcher de la première plus près que d'une grandeur donné, si petite qu'on la puisse supposer,* $\cdots$. En 1821, Cauchy propose la définition suivante : *"si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres"*. Weierstrass écrit la définition moderne de la limite, avec les epsilons (ε), entre 1840 et 1860. Ces définitions ont représenté un progrès énorme, puisqu'elles permettent de savoir exactement de quoi on parle, et de distinguer avec certitude les propriétés vraies des propriétés fausses.

Définition 16.

On appelle suite de nombre réel toute application d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u: \quad \begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) := u_n \end{aligned}$$

On ne confondra pas les notations :
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: application u de $I \subseteq \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$
- u_n : nombre réel qui est la valeur u_n de u pour n.

Exemple 4. *1. Les premiers termes de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont*

$$(1, \quad 0.5, \quad 0.3333, \quad 0.25, \quad 0.2, \quad 0.1666, \quad 0.1428, \quad 0.125, \quad ...)$$

Le millième terme est 0.001.
2. Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (n^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont*

$$(1, \quad 1.4142, \quad 1.4422, \quad 1.4142, \quad 1.3797, \quad 1.3480, \quad 1.3205, \quad 1.2968, \quad ...)$$

Le centième terme vaut environ 1.0741 et le millième terme est 1.0069.

2.2 Définitions

Définition 17.

Une suite $u = (u_n)_n$ est dite :
1. constante si et seulement si ses termes ont la même valeur, *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $(u_n = u_0)$.
2. croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n < u_{n+1}$).
3. décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > u_{n+1}$).
4. monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.
5. majorée si et seulement si tous ses termes sont inférieurs à un certain nombre *i.e.* si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq M$.
6. minorée si et seulement si tous ses termes sont supérieurs à un certain nombre *i.e.* si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq m$.
7. bornée si et seulement si elle est majorée et minorée. On peut vérifier que cela est équivant à $\exists M \in \mathbb{R}_+\ \forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leq M$.

Toutes ces propriétés se déclinent sur le mode "à partir d'un certain rang". Par exemple, dire qu'une suite est croissante à partir d'un certain rang, équivant à dire qu'il existe un $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\, (n \geq q \Longrightarrow u_n \leq u_{n+1}).$$

Signalons que les suites constantes à partir d'un certain rang ont reçu le nom de suites stationnaires.

Exercice 18.

Montrer que qu'une suite $u = (u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante) si et seulement si

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2\ (n \leq m \Longrightarrow u_n \leq u_m)\ (\text{ resp. } \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2\ (n \leq m \Longrightarrow u_n \geq u_m).$$

Exercice 19.

Pour $a > 0$, on se donne la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{a}{u_n}). \end{cases}$$

1. Montrer que $u_0 = \sqrt{a}$ si et seulement si la suite (u_n) est constante.
2. Montrer que si $u_0 \neq \sqrt{a}$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de $n = 1$ et minorée.

2.3 Opération algébriques sur les suites

Définition 20.

Soient u et v deux suites réelles et λ un nombre réel.
1. On appelle somme de u et v, et on note $u+v$, la suite réelle w définie par $\forall n \in \mathbb{N}\,(w_n = u_n + v_n)$.
2. On appelle produit de u par le scalaire λ, et on note λu, la suite réelle w définie par $\forall n \in \mathbb{N}\,(w_n = \lambda u_n)$.
3. On appelle produit de u et v, et on note uv, la suite réelle w définie par $\forall n \in \mathbb{N}\,(w_n = u_n v_n)$.
4. Si on suppose de plus que v ne s'annule pas (*i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n \neq 0$), on appelle suite inverse de la suite v, et on note $\frac{1}{v}$, la suite réelle w définie par $\forall n \in \mathbb{N}\,(w_n = \frac{1}{v_n})$.
On appelle alors quotient de u et v la suite $u\frac{1}{v}$ notée $\frac{u}{v}$.

2.4 Suite extraites

Définition 21.

Soient u et v deux suites réelles. on dit que v est extraite de u si et seulement si il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ on ait $v_n = u_{\phi(n)}$.

Remarque 5. *On a* $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \phi(n) \geq n$, *ceci se montre aisément par récurrence sur* n.

Exemple 5. *1. La suite constante* $(v_n) = (1)$ *est extraite de la suite* $(u_n) = ((-1)^n)$ $(v_n = u_{2n})$*. De même, la suite* $(v_n) = (-1)$ *est extraite de la suite* $(u_n) = ((-1)^n)$.
2. La suite des termes de rang pair $(u_{2n})_n$ *et la suite des termes de rang impair sont extraites de* $(u_n)_n$.
3. $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ *est extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. $(u_{n^2-n})_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(il y a "répétition" de* u_0*).*

2.5 Comportement asymptotique d'une suite réelle

2.5.1 Notion de limite

Nous allons maintenant introduire une notion très importante : celle de la convergente d'une suite. Nous voulons formaliser l'idée intuitive que les termes de la suite s'approchent de plus en plus d'une certaine valeur. Dans l'exemple 4 2. les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'approchent de plus en plus en 0, sa limite sera donc 0. D'une manière plus précise, on a la définition suivante :

Définition 22.

1. On dit qu'une suite u admet $+\infty$ pour limite, si et seulement si, quelque soit le nombre réel A que l'on se donne, la suite est minorée à partir d'un certain rang (qui dépend bien sûr de A), *i.e.*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists q \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q \Longrightarrow u_n \geq A).$$

2. On dit qu'une suite u admet $-\infty$ pour limite, si et seulement si, quelque soit le nombre réel A que l'on se donne, la suite est majorée à partir d'un certain rang (qui dépend bien sûr de A), *i.e.*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists q \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q \Longrightarrow u_n \leq A).$$

3. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite u admet l pour limite, si et seulement si quelque soit le nombre réel ε strictement positif que l'on se donne, les termes de la suite sont dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ à partir d'un certain rang (qui dépend de ε).
Autrement dit si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

4. On dit que u est convergente si et seulement si il existe $l \in \mathbb{R}$, tel que u admette l pour limite. Dans les autres cas, on dit que u est divergente.

La limite (fnie ou non) de la suite u est notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exemple 6. *1. Toute suite constante égale à un nombre a à partir d'un certain rang converge vers a.*
En effet, soit $\varepsilon > 0$*. Par hypothèse, il existe* $q \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q \Longrightarrow u_n = a)$*. Donc*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q \Longrightarrow |u_n - a| = 0 < \varepsilon).$$

La suite alors converge vers a.
2. La suite $((-1)^n)$ *est divergente.*
En effet, supposons par l'absurde que la suite $((-1)^n)$ *est converge vers une limite l. Alors,* $\forall \varepsilon > 0$*, Il exsite donc un entier* $q \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q \Longrightarrow |(-1)^n - l| < \varepsilon).$$

En prenant, $\varepsilon = 1$ *et* $n = 2q$*, on obtient* $|1-l| < 1$*. En prenant* $n = 2q+1$*, on obtient* $|-1-l| < 1$*. On déduit alors que*

$$2 = 1 + l + 1 - l \leq |1-l| + |1+l| < 2,$$

ce qui est absurde. Donc la suite $((-1)^n)$ *est bien divergente.*

Remarque 6. *Il est équivant à dire que u admet* 0 *pour limite ou que* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* 0 *pour limite.*

Un premier résultat important est le suivant

Théorème 23.

Toute suite convergente est bornée.

Preuve. Soit une suite u ayant l pour limite. Alors, pour $\varepsilon = 1$,

$$\exists q_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q_1 \Longrightarrow |u_n - l| < 1).$$

Donc, en utilisant l'inégalité tringulaire, $\forall n \geq q_1$, on a

$$|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| < 1 + |l|.$$

On déduit que la suite u est bornée à partir d'un certain rang. Elle est donc bornée. En effet, si $q_1 = 0$, la suite est borée. Si $q_1 \geq 1$, l'ensemble $B := \{u_0, u_1, ..., u_{q-1}\}$ est fini, il a donc un plus petit élément $m = min(B)$ et un plus grand élément $M = max(B)$, et donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$min(m, -1-|l|) \leq u_n \leq max(M, 1+|l|).$$

Remarque 7. *La réciproque du Théorème 48 est fausse. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.*

Théorème 24.

(Unicité de la limite)
Soit u une suite convergente vers l alors l est unique.

Preuve. Supposons que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux limites l et l' telles que $l \neq l'$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{array}{l} \exists q' \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q' \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon) \\ \exists q'' \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q'' \Longrightarrow |u_n - l'| < \varepsilon). \end{array}$$

Posons, en particulier, $\varepsilon = \dfrac{|l-l'|}{4} > 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq q = max(q', q'') \text{ on a } \left\{ \begin{array}{l} |u_n - l| < \varepsilon \\ |u_n - l'| < \varepsilon, \end{array} \right.$$

et

$$\begin{array}{ll} 0 & < |l-l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| = |u_n - l| + |u_n - l'| \\ & \leq \dfrac{|l-l'|}{4} + \dfrac{|l-l'|}{4} = \dfrac{|l-l'|}{2}. \end{array}$$

D'où $0 < |l-l'| < \dfrac{|l-l'|}{2}$, ce qui absurde, donc $l = l'$.

Définition 25.

On dira qu'une suite u admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour exprimer qu'elle admet $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel l pour limite.

2.5.2 Limite et opérations algébriques

Théorème 26.

Soient u et v deux suites réelles ademttant resp. l et l' pour limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, sous reserve que $l + l'$ et ll' soient définies dans $\overline{\mathbb{R}}$,
1. $u + v$ admet $l + l'$ pour limite
2. λu admet λl pour limite
3. uv admet ll' pour limite

Preuve. *1.* Soit $\varepsilon > 0$, comme les deux suites u et v convergent vers l et l' respectivement, alors

$$\begin{array}{l} \exists q' \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q' \Longrightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}) \\ \exists q'' \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q'' \Longrightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}). \end{array}$$

Pour $n \geq q' + q''$, on a

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où la suite $(u + v)$ converge vers $l + l'$.
2. et *3.* se démontrent de la même façon.

2.5.3 Passage à la limite dans les inégalités

Théorème 27.

Soient u et v deux suites réelles convergentes, de limites respectives l et l'. Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, *i.e* $\exists q_1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q_1 \Longrightarrow u_n \leq v_n)$, alors on a $l \leq l'$.

Preuve. Supposons par l'absurde que $l > l'$ et il existe $q_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geq q_1 \Longrightarrow u_n \leq v_n)$. Soit, $\varepsilon = \dfrac{l-l'}{4}$. Il existe $q' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q' \Longrightarrow |u_n - l| < \dfrac{l-l'}{4})$. Il existe $q'' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q'' \Longrightarrow |v_n - l'| < \dfrac{l-l'}{4})$. Ce qui implique que, si $n \geq q := max(q', q'')$

$$\frac{3l+l'}{4} = l - \frac{l-l'}{4} < u_n < l + \frac{l-l'}{4} = \frac{5l-l'}{4}$$
$$\frac{5l'-l}{4} = l' - \frac{l-l'}{4} < v_n < l' + \frac{l-l'}{4} = \frac{l+3l'}{4}.$$

Donc, si $n \geq q$,

$$v_n - u_n < \frac{l+3l'}{4} - \frac{3l+l'}{4} = \frac{l'-l}{2} < 0.$$

Donc si $n \geq max(q, q_1)$ on a $u_n \leq v_n < u_n$. D'où une contradiction.

Remarque 8. *Considérons les deux suites*

$$(u_n)_n = (1 - \frac{1}{n})_n \textit{ et } (v_n)_n = (1 + \frac{1}{n})_n,$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ *et* $u_n < v_n$.
Le résultat montre que si on a $u_n < v_n$*, on peut seulement conclure que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

2.5.4 Existence d'une limite par comparaison

Théorème 28.

(Théorème d'encadrement ou des gendarmes)
Soient u, v et w trois suites réelles. On suppose que u et v sont convergentes, de même limite l, telle qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors v est convergente de limit l.

Preuve. Il existe un rang q, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq q$ on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$. Soit $\varepsilon > 0$,
il existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q_1 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$,
il existe $q_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q_1 \Longrightarrow |w_n - l| < \varepsilon)$.
Alors, si $n \geq max(q_1, q_2, q) := q'$, on ait

$$l - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \varepsilon.$$

Les termes de la suite v sont donc dans l'intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ à partir d'un certain rang. La suite est alors convergente vers l.

Exemple 7. *Soit, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} u_n \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} \\ u_n \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n+1}. \end{cases}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. *On conclut que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2.5.5 Limite et suites extraites

Théorème 29.

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si la suite u admet l pour limite, toute suite extraite de u admet aussi l pour limite.
Inversement, il suffit que les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ des termes de rang pair et de rang impair admettent le même nombre $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite, pour que u admette l pour limite.

Preuve. Soit ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui même. Soit $\varepsilon > 0$. u converge vers l, il existe alors $q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq q \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$. Mais, dans ce cas $\phi(n) \geq n \geq q$, et donc, également $|u_{\phi(n)} - l| < \varepsilon$. Il en résulte que la suite v, définie par $v_n = u_{\phi(n)}$ converge aussi vers l. (Démonstration analogue pour une limite infinie).
Inversement, supposons que les suites extraites $(x_n)_n = (u_{2n})_n$ et $(y_n)_n = (u_{2n+1})_n$ admettent le même nombre l pour limite. Soit $\varepsilon > 0$,
il existe $q' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq q' \Longrightarrow |x_n - l| < \varepsilon)$,
il existe $q'' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq q'' \Longrightarrow |y_n - l| < \varepsilon)$
Soit $p \geq q := max(2q', 2q''+1)$. Alors, on a deux posibilités :
• p est pair, il est de la forme $p = 2n$ où $n \in \mathbb{N}$. Mais puisque $p = 2n \geq q \geq 2q'$, on en déduit que $n \geq q'$ et donc
$$|u_p - l| = |u_{2n} - l| = |x_n - l| < \varepsilon.$$
• p est impair, il est de la forme $p = 2n+1$ où $n \in \mathbb{N}$. Mais puisque $p = 2n+1 \geq q \geq 2q''+1$, on en déduit que $n \geq q''$ et donc
$$|u_p - l| = |u_{2n+1} - l| = |y_n - l| < \varepsilon.$$
Donc $\forall p \geq q$, la quantité $|u_p - l|$ est majorée par ε.

Remarque 9. *On retiendra que pour montrer qu'une suite u n'a pas de limite il suffit de trouver deux suites extraites ayant des limites différentes. C'est le cas de la suite $((-1)^n)_n$ par exemple.*

2.5.6 Comportenment asymptotique des suites monotones

Théorème 30.

Une suite réelle croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang, non majorée (resp. non minorée) admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite.

Preuve. Supposons que la suite u est croissante et non majorée. Soit A un nombre réel, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $u_q \geq A$. Mais la suite étant croissante, on a pour tout $n \geq q$ l'inégalité $u_n \geq u_q$. On en déduit que la suite u est minorée par A à partir d'un certain rang q. Elle admet donc $+\infty$ pour limite. ∎

Théorème 31.

Une suite réelle croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang, majorée (resp. minorée) est convergente majorée (resp. minorée) par sa limite.

Preuve. (Dans le cas des suites croissantes majorées) :
Soit l'ensemble $E = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, E est non vide majoré dans $\mathbb{R}$. Par la propriété de la borne supérieure E possède une borne supérieure. Posons $l = sup(E)$. Par définition de l,
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un élément de E soit u_p, tel que

$$l - \varepsilon < u_p \leq l.$$

D'autre part, la suite $(u_n)_n$ est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$ on a

$$l - \varepsilon < u_p \leq u_n \leq l < l + \varepsilon.$$

Il en résulte que $\forall \varepsilon > 0$, on a trouvé $p \in \mathbb{N}$, tel que $(n \geq p \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$. La suite u est alors convergente.

Remarque 10. *Théorème 31 n'est pas, en général, vrai pour une suite rationnelle. En effet, soit la suite $(u_n)_n$ définie par*

$$u_0 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 2}. \tag{2.1}$$

La suite $(u_n)_n$ est croissante majorée par 2 mais sa limite n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Par passage à la limite dans la relation (2.1), la limite l vérifie

$$l = \frac{2l + 2}{l + 2} \Longrightarrow l^2 = 2,$$

une équation qui n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 32.

On reprend la suite de l'exercise 19 définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{a}{u_n}), \qquad a > 0. \end{cases}$$

Montrer que la suite est convergente vers une limite $l = \sqrt{a}$.

2.6 Suites adjacentes

Dans $\mathbb{R}$, les suites adjacentes permettent d'obtenir l'existence de limites sans les connaîtres a priori.

Définition 33.

Deux suites u et v sont dites adjacentes, si et seulement si, à partir d'un certain rang l'une est croissante, l'autre est décroissante, et si la suite $v - u$ admet 0 pour limite.

Théorème 34.

Deux suites adjacentes sont de même limite l et si à partir d'un certain rang q la suite u est croissante et la suite v est décroissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq q \Longrightarrow u_n \leq l \leq v_n)$.

Preuve. Supposons que la suite u est croissante et la suite v est décroissante à partir d'un certain rang q. La suite $v - u$ est convergente, elle est donc bornée inférieurement par une constante a, *i.e.* $\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : v_n - u_n \geq a$.

Comme v décroit à partir d'un certain rang q, on a $v_n \le v_q$, pour tout $n \ge q$, donc $u_n \le v_n - a \le v_q - a$. La suite u est donc majorée par $v_q - a$. Il en résulte qu'elle converge vers une limite l, à partir d'un certain rang q on a $u_n \le l$.
De même, comme u est croissante à partir d'un certain rang q, on a $u_n \ge u_q$, $\forall n \ge q$. Donc $v_n \ge u_n + a \ge a + u_q$. La suite v est dons minorée. Il en résulte qu'elle converge vers une limite l', et à partir d'un certain rang q, et on a $v_n \ge l'$. Mais la suite $v - u$ converge vers $l - l'$ et vers 0. Par unicité de la limite $l = l'$. Les deux limites sont donc égales à partir d'un certain rang q, et $u_n \le l \le v_n$.

2.7 Théorème de Bolzano-Weiestrass

On sait que : toute suite convergente est bornée. La réciproque de cette propriété est fausse comme le montre l'exemple de la suite $((-1)^n)_n$. Mais on a

Théorème 35.

De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

La démonstration du Théorème 35 est basée sur le lemme suivant :

Lemme 1. *De toute suite réelle, on peut extraire une suite monotone.*

Preuve. Posons $A = \{m \in \mathbb{N} : \forall n \ge m, a_n \ge a_m\}$. On distingue deux cas :
• A est infini : si $m_1 < m_2 < \ldots$ désignent les éléments de A, la suite (a_{m_j}) est croissante.
• A est fini (ou vide): il existe un entier $k > 0$ tel que pour tout $m \ge k$, on a $m \notin A$. Donc $\forall m \ge k$, $\exists n \ge m$, $a_n < a_m$. Ceci nous permet de construire par induction une sous-suite $(a_{n_j})_j$ décroissante.
Preuve du Théorème 35. D'après le lemme précédent, on sait que : de toute suite réelle on peut extraire une suite monotone. Si la suite de départ est bornée, la suite extraite l'est aussi. C'est donc une suite croissante majorée ou décroissante minorée. Elle donc convergente.

2.8 Suites de Cauchy

Comme pour le cas des suites adjacentes, la notion des suites de Cauchy est un nouveau moyen de montrer la convergence d'une suite sans connaître sa limite a priori.

Définition 36.

Une suite réelle est dite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}\ (n, m \ge q \Longrightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon).$$

Théorème 37.

Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$(n \ge q \Longrightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2})$$
$$(m \ge q \Longrightarrow |u_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Donc, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\left.\begin{array}{l} n \ge q \\ m \ge q \end{array}\right\} \Longrightarrow |u_n - u_m| \le |u_n - l| + |l - u_m| < \varepsilon.$ ∎

Lemme 2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Preuve. Par définition d'une suite de Cauchy, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}\ (n, m \geq q \Longrightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon).$$

pour $\varepsilon = 1$, $| x_n | \leq 1 + u_{q_1}$, pour tout entier $n \geq q_1$. Donc si $q_1 = 0$ la suite est bornée. Si $q_1 > 0$, on a alors $| u_n | \leq 1 + u_{q_1} + \max\limits_{0 \leq j \leq q_1 - 1} | u_j |, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Lemme 3. *Si une suite de Cauchy suite $(u_n)_n$ possède une suite extraite $(u_{\phi_n})_n$ convergente vers u, alors $(u_n)_n$ converge aussi vers u.*

Théorème 38.

Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente dans $\mathbb{R}$. On dit que $\mathbb{R}$ est un espace complet.

Preuve. Par le lemme 2 toute suite de Cauchy est bornée, on peut donc en extraire une sous-suite convergente et par le lemme 3, la suite de Cauchy converge aussi. ■

Exemple 8. *Pour tout réel x tel que $|x| < 1$, la suite u définie par*

$$u_n = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n},$$

est de Cauchy.
En effet, on a pour tout $m > n$,

$$\begin{aligned} |u_m - u_n| &= |\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \ldots + \frac{x^m}{m}| \\ &\leq |x|^{n+1}(1 + |x| + \ldots + |x|^{m-n-1}) \\ &= |x|^{n+1}\left(\frac{1 - |x|^{m-n}}{1 - |x|}\right) \\ &\leq |x|^{n+1}\frac{1}{1 - |x|}. \end{aligned}$$

Or la suite $(|x|^{n+1}\dfrac{1}{1 - |x|})_n$ converge vers 0 ($|x| < 1$) et donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq q \Longrightarrow \left|\frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|}\right| < \varepsilon).$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ (m > n \geq q \Longrightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon).$$

Ce qui prouve que $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Remarque 11. *L'espace $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet, soit la suite u définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{2}{u_n}). \end{cases}$$

u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ mais n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ (on peut montrer que la limite de la suite u est $\sqrt{2}$).

2.9 Quelques exemples de suites

Théorème 39.

1. *Soit $p \in \mathbb{Z}^*$, alors*
$$\lim_{n\to+\infty}(n^p) = \begin{cases} +\infty \text{ si } p > 0 \\ 0 \text{ si } p < 0. \end{cases}$$
2. *Soit $a \in \mathbb{R}$, alors*
$$\lim_{n\to+\infty}(a^n) = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 1 \\ 0 \text{ si } |a| < 1, \\ 1 \text{ si } a = 1. \end{cases}$$
et la suite n'admet pas de limite si $a \leq -1$.
3. $\forall p \in \mathbb{N}$ *et* $a > 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{a^n} = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$.

Preuve. *Montrons 2. Par récurrence sur n, on montre facilement que*
$$\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{on a} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{2.2}$$
Supposons tout d'abord que $a > 1$, l'inégalité (2.2) nous donne, $\forall n \in \mathbb{N}$
$$a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1).$$
Or $a - 1 > 0$, la suite $(1 + n(a-1))_n$ tend vers $+\infty$, et donc aussi $(a^n)_n$.
Si $|a| < 1$ et $a \neq 0$, on a $|a^n| = |a|^n = \dfrac{1}{(\frac{1}{|a|})^n}$, comme $\dfrac{1}{|a|} > 1$, on applique alors le cas précédent et la suite $(a^n)_n$ converge vers 0.
Les cas $a = 1$ et $a = 0$ sont trivials. Le cas $a = -1$ est déjà traité.
Si $a < -1$, la suite $(a^{2n})_n$ converge vers $+\infty$ tandis que la suite $(a^{2n+1})_n$ converge vers $-\infty$ et donc la suite diverge.

Chapitre 3

Topologie de $\mathbb{R}$

3.1 Ouverts, fermés et voisinage de $\mathbb{R}$

3.1.1 Parties Ouvertes

Définition 40.

On dit qu'une partie U de $\mathbb{R}$ est ouverte dans $\mathbb{R}$ (ou un ouvert de $\mathbb{R}$) si $U = \emptyset$ ou bien

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0,\ \text{tel que }]x-r, x+r[\subset U.$$

On a les propriétés essentielles suivantes :

Proposition 41.

Les ouverts de $\mathbb{R}$ vérifient les trois propriétés suivantes :
i) $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}$,
ii) Toute réunion (finie ou non) d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
iii) Toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Démonstration immédiate à faire en exercice.

Remarque 12. *Une intersection infinie d'ouverts n'est pas en général un ouvert, par exemple* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ *qui n'est pas un ouvert.*

3.1.2 Parties fermées

Définition 42.

On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée dans $\mathbb{R}$ (ou un fermé de $\mathbb{R}$) si son complémentaire $C_{\mathbb{R}}^{F}$ est un ouvert.

Remarque 13. *Il est clair que : U est ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si son complémentaire est fermé.*

En pratique, pour montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est fermée, on utilise caractérisation suivante :

Théorème 43.

Soit F une partie non vide de $\mathbb{R}$. On a
F est un fermé $\Longleftrightarrow$ toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de F, qui converge dans $\mathbb{R}$, vérifie $\lim_n u_n \in F$.

Preuve. $\Longrightarrow$) Par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $(u_n)_n$ de F, qui converge vers x telle que $x \notin F$. Comme le complémentaire $C_{\mathbb{R}}^{F}$ de F est un ouvert, il existe $r > 0$, tel que $]x-r, x+r[\subset C_{\mathbb{R}}^{F}$. Comme la suite $(u_n)_n$ converge vers x, alors pour n assez grand, on a $u_n \in]x-r, x+r[$, ce qui contredit le fait que la suite $(u_n)_n$ d'éléments de F.

$\Longleftarrow$) Par l'absurde : supposons que $C_{\mathbb{R}}^F$ n'est pas un ouvert. Il existe donc $x \in C_{\mathbb{R}}^F$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[\not\subseteq C_{\mathbb{R}}^F$, ce qui implique qu'il existe un élément $u_n \in]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ et $u_n \in F$. La suite $(u_n)_n$ converge vers x et $x \notin F$, ce qui est absurde.
On a les propriétés essentielles suivantes :

Proposition 44.

Les fermés de $\mathbb{R}$ vérifient les trois propriétés suivantes :
i) $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont deux fermés de $\mathbb{R}$,
ii) Toute réunion finie de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
iii) Toute intersection (finie ou non) de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemple 9. *i) Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$.*
ii) Tout intervalle fermé ou de la forme $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.
iii) Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, puisque $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} =]-\infty, 0[\bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[$ qui est un ouvert et $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$ qui est aussi un ouvert.

Remarque 14. *Un ensemble peut n'être ni ouvert ni fermé, c'est le cas de l'ensemble $A = [0, 1[$. En effet*
i) A n'est pas un fermé, puisque la suite $(1-\frac{1}{n})_n$ est une suite d'élément de A qui converge vers 1 mais $1 \notin A$.
ii) A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$: son complémentaire $C_{\mathbb{R}}^A =]-\infty, 0[\bigcup[1, +\infty[$ n'est pas fermé puisque la suite $(-\frac{1}{n})_n$ est une suite de $C_{\mathbb{R}}^A$ qui converge vers 0 mais $0 \notin C_{\mathbb{R}}^A$.

3.1.3 Voisinage

Définition 45.

Soient $V \subset \mathbb{R}$ et $x \in V$. On dit que V est un voisinage de x s'il existe $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset V$. On note $V(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x.

On a le théorème suivant :

Théorème 46.

i) Soit $U \subset \mathbb{R}$. U est ouvert $\Longleftrightarrow$ U est voisinage de chacun de ses points, c'est à dire : $\forall x \in U, U \in V(x)$.
ii) L'ensemble $V(x)$ est stable pour la réunion et l'intersection finie.

Preuve. i) $\Longrightarrow$) Evident, U est un voisinage particulier de chaque $x \in U$.
$\Longleftarrow$) Soit $x \in U$, il existe alors $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset U$. Donc U est un ouvert de $\mathbb{R}$. ∎

3.2 Intérieur, partie dense et parties compactes de $\mathbb{R}$

3.2.1 Point adhérent, point d'accumulation et point isolé

Définition 47.

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que
i) x est un point adhérent à A si $\forall r > 0, \quad]x-r, x+r[\cap A \neq \emptyset$, c'est à dire :

$$\forall r > 0,\ \exists a \in A,\ \text{tel que } a \in]x-r, x+r[.$$

On appellera adhérence de A, notée $\overline{A}$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ qui sont adhérent à A.
ii) x est un point d'accumulation de A si

$$\forall r > 0,\ \exists a \in A,\ \text{tel que } a \neq x \text{ et } a \in]x-r, x+r[.$$

D'une autre manière si tout voisinage de x contient des points de A autres que x. On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A.
iii) x est un point isolé de A si

$$\exists r > 0,\ \text{tel que }]x-r, x+r[\cap A = \{x\}.$$

Le résultat suivant caractérise $\overline{A}$ en termes des suites.

Théorème 48.

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivant :
$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.

Preuve. $\Longrightarrow$) Pour chaque entier $n \geq 1$, soit $u_n \in A \bigcap]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, la suite $(u_n)_n$ converge donc vers x.
$\Longleftarrow$) Soit $r > 0$. Comme $\lim\limits_{n} u_n = x$, alors pour n assez grand, $u_n \in]x-r, x+r[$. Donc $x \in \overline{A}$.

Proposition 49.

On a les propriétés suivantes :
i) $\overline{A}$ est un fermé, il est le plus petit fermé contenant A.
ii) A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$

Exemple 10. *i) Soit* $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, *alors* $\overline{A} = A \bigcup \{0\}$ *et* $A' = \{0\}$.
ii) $A =]3, 4[$, *alors* $\overline{A} = [3, 4] = A'$.
iii) $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$

3.2.2 Intérieur d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 50.

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un point intérieur de A si A est un voisinage de x, c'est à dire s'il existe $r > 0$, $]x-r, x+r[\subset A$.
L'ensemble de tous les points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note , ou encore $int(A)$.

Proposition 51.

On a les propriétés suivantes :
i) est un ouvert, il est le plus grand ouvert inclus dans A.
ii) A est un ouvert si et seulement si $= A$

3.2.3 Partie dense de $\mathbb{R}$

Définition 52.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{A} = \mathbb{R}$.

Du theorem 48 on déduit le :

Théorème 53.

$A \subset \mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

Exemple 11. *$\mathbb{Q}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.*

3.2.4 Parties compactes de $\mathbb{R}$

Définition 54.

On dit qu'une partie K de $\mathbb{R}$ est compacte si de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on a la caractérisation suivante :

Théorème 55.

Une partie K de $\mathbb{R}$ est copmacte si et seulement si K est fermée bornée.

Preuve. Supposons que K est fermée bornée et $(u_n)_n$ une suite d'élément de K. La suite $(u_n)_n$ est donc bornée. le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite qui converge vers un réel x, comme K est fermée, la limite est dans K.

Inversement, supposons que K est compacte. Montrons que K est fermée. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de K qui converge vers x. Comme K est compacte, cette suite admet une sous-suite convergente vers $y \in K$. Donc $x = y \in K$.
Montrons que K est bornée. Supposons par l'absurde le contraire, *i.e*, $\forall M \in \mathbb{R}, \exists u \in K : \mid u \mid > M$. Il va exister donc une suite $(\mid u_n \mid)_n$ qui converge vers $+\infty$. Donc toute sous-suite de $(\mid u_n \mid)_n$ va converger vers $+\infty$, et donc n'est pas convergente dans K. Ce qui est absurde.

Exemple 12. *Tout intervalle* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *est compact.*

Chapitre 4

ELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE : LIMITES ET CONTINUITÉ

Définition 56.

On appelle fonction numérique f sur un ensemble I toute application de I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $I \subseteq \mathbb{R}$, on dit que f est une fonction réelle d'une variable réelle. On écrit

$$f: \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

4.1 Définitions

Définition 57.

Une fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite :
1. croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si $\forall (x_1, x_2) \in I^2$ on a $(x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$ (resp. $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$).
2. décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si $\forall (x_1, x_2) \in I^2$ on a $(x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$ (resp. $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$).
3. monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.
4. majorée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I\ f(x) \leq M$.
5. minorée si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ f(x) \geq m$.
6. bornée si et seulement si elle est majorée et minorée, *i.e.* $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2\ \forall x \in I\ m \leq f(x) \leq M$. On peut vérifier que cela est équivant à $\exists M \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in I\ |f(x)| \leq M$.
7. paire (resp. impaire) si et seulement si $\forall x \in I,\ f(x) = f(-x)$ (resp. $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$).

4.2 Limites

Dans cette section, I designe un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point.
On dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage de a ($a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$) si elle est vraie sur l'intersection de I avec :
1. un intervalle ouvert non vide centré en a si $a \in \mathbb{R}$, *i.e.* un intervalle de type $]a-\eta, a+\eta[$, $\eta > 0$.
2. un intervalle de type $]\eta, +\infty[$, $\eta > 0$, lorsque $a = +\infty$.
3. un intervalle de type $]-\infty, \eta[$, $\eta > 0$, lorsque $a = -\infty$.

4.2.1 Notion de limite

Définition 58.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
On dit que f admet l pour limite en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I\ (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon), \quad (1).$$

ou bien f admet l pour limite en a si et seulement si :

$$\forall V \in V(l),\ \exists U \in V(a) : f(U \cap I) \subseteq V(l), \quad (2).$$

Remarque 15. *Les deux définitions (1) et (2) sont équivalentes.*

Définition 59.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
1. Si I admet $+\infty$ comme extrémité, on dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ (x \geq A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

2. Si I admet $-\infty$ comme extrémité, on dit que f admet l pour limite en $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ (x \leq B \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

Lorsque f admet une limite l en a ($a \in \mathbb{R}, a = +\infty, a = -\infty$) cette limite est unique et se note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Définition 60.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
1. Soit $a \in \overline{I}$. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I\ (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A).$$

2. Si I admet $+\infty$ comme extrémité, on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists A' \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ (x \geq A' \Longrightarrow f(x) \geq A).$$

3. Si I admet $-\infty$ comme extrémité, on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B' \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ (x \leq B' \Longrightarrow f(x) \geq A).$$

On définit aussi les notions de la limite à droite et à gauche en $a \in \mathbb{R}$ en remplaçant simplement dans les définitions précédentes la condition $|x - a| \leq \eta$ par $0 < x - a \leq \eta$ pour la notion de limite à droite et $0 < a - x \leq \eta$ pour la notion de limite à gauche. On a alors la

Définition 61.

1. On dit que f admet une limite à droite l en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I\ (0 < x - a \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

Cette limite est notée $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

2. On dit que f admet une limite à gauche l en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I\ (0 < a - x \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

Cette limite est notée $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Exemple 13. *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si\ x > 0 \\ 2x - 1 & si\ x < 0, \end{cases}$$

on a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$

4.2.2 Propriétés des fonctions ayant une limite

Théorème 62.

(Unicité de la limite)
Si f admet l et l' pour limite en a alors $l = l'$.

Théorème 63.

Si f admet une limite finie l en a alors f est bornée au voisinage de a.

La preuve du Théorème 62 et Théorème 63 est similaire à celle du Théorème 48 et Théorème 24, Chapitre 2.

Théorème 64.

(Utilisation des suites pour traduire une limite de fonction) Pour que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admette une limite l en a il faut et il suffit que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

Preuve. Supposons $a \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$ (les cas $+\infty$ et $-\infty$ sont analogues).
1. Supposons que f admette une limite l en a et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.
Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, il existe $\eta > 0$, tel que

$$\forall x \in I\ (|x-a| \le \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \le \varepsilon).$$

Ensuite, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, il existe $N \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n \ge N \Longrightarrow |u_n - a| < \eta).$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \ge N \Longrightarrow |u_n - a| \le \eta \Longrightarrow |f(u_n) - l| \le \varepsilon)$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \ge N \Longrightarrow |f(u_n) - l| \le \varepsilon).$$

2. La réciproque en exercice (démonstration par l'absurde).

4.2.3 Ordre et limite

Théorème 65.

(Théorème d'encadrement)
Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $l, l' \in \mathbb{R}$.
1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$ et $f(x) \le g(x)$ au voisinage de a alors $l \le l'$.
2. Si

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to a} h(x) = l \\ f(x) \le g(x) \le h(x) \text{ au voisinage de a} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = l.$$

Preuve. La preuve est semblable à celle du Théorème 27, Chapitre 2.

Théorème 66.

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\})^2$ tel que $a < b$ et $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante.
1. Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in]a,b[} f(x) = \sup\{f(x),\ x \in]a,b[\} = \sup f(]a,b[)$.
2. Si f n'est pas majorée alors f admet $+\infty$ pour limite en b.

Preuve. En exercice : utiliser la fait que la partie $f(]a,b[)$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

4.3 Continuité en un point, sur un intervalle

Définition 67.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.
1. On dit que f est continue en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I\ (|x-a| \le \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \le \varepsilon).$$

2. f est dite continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.
3. Si f n'est pas définie en un point a mais $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\widetilde{f}$ définie sur I par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ l \text{ si } x = a \end{cases}$$

est continue en a. Cette fonction $\widetilde{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en a.

Exemple 14. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{a\}$ par*

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a},$$

on $\lim_{x \to a} f(x) = 2a$, alors son prolongement par continuité $\widetilde{f}$ est donné par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} \text{ si } x \neq a \\ 2a \text{ si } x = a. \end{cases}$$

Théorème 68.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Pour que f soit continue en a il faut et il suffit que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Comme conséquence du théorème précédent et Théorème 64 on a le

Théorème 69.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Pour que f soit continue en a il faut et il suffit que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans I telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

4.4 Opérations algébrique sur les fonction continues

Théorème 70.

Soient $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
1. Si f est continue en a alors $|f|$ est continue en a.
2. Si f et g sont continues en a alors $f+g$ est continue en a.
3. Si f est continue en a alors λf est continue en a.
4. Si f et g sont continues en a alors fg est continue en a.
5. Si g est continue en a et si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est continue en a.
6. Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

4.5 Continuité sur un intervalle

4.5.1 Image d'un intervalle par une application continue

Théorème 71.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Preuve. Sans perdre de généralité, on supose que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. Nous construisons d'une manière récurrente deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que $(a_n)_{n\geq 0}$ soit croissante et $(b_n)_{n\geq 0}$ décroissante, vérifiant de plus $\forall n \geq 0$

$$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n} \tag{4.1}$$

et

$$f(a_n) \leq 0, \ f(b_n) \geq 0. \tag{4.2}$$

Notre but et de démontrer que les deux suites sont adjacentes et donc elles convergent vers une limite $c \in [a,b]$.
On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Les inégalités précédentes sont ainsi vérifiées de façon évidente pour $n = 0$. Supposons que les deux suites sont construit à l'ordre n. Construisons les à l'ordre $n+1$.
Pour cela, posons $\lambda_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Deux cas sont possibles :
• $f(\lambda_n) \leq 0$, alors on pose

$$a_{n+1} = \lambda_n \text{ et } b_{n+1} = b_n.$$

• $f(\lambda_n) \geq 0$, on pose

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \lambda_n.$$

Dans les deux cas, nous avons

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n,$$

et par construction $f(a_{n+1}) \leq 0$ et $f(b_{n+1}) \geq 0$ et

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}.$$

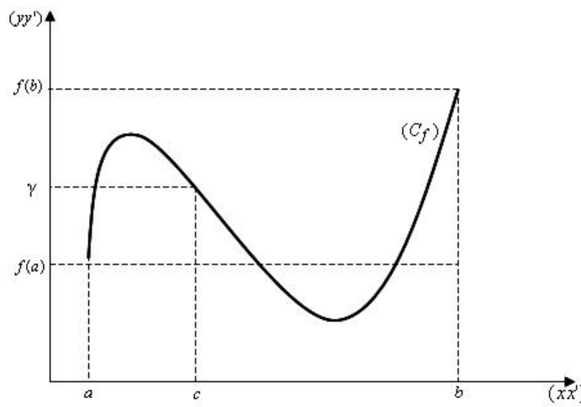
On construit bien deux suites ayant les propriétés annoncées. Par conséquent, elles sont adjacentes et elles convergent vers une limite $c \in [a,b]$. Comme f est continue sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n) = f(c)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} b_n) = f(c)$.

Comme $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$, par le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) \leq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$, ce qui implique que $f(c) = 0$.

Nous en déduisons le résultat suivant

Théorème 72.

(Théorème des valeurs intermédiaires)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, et $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$. Alors, pour toute valeur γ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = \gamma$.



Preuve. Sans perdre de généralité, on supose que $f(a) \leq f(b)$ (même preuve si $f(a) \geq f(b)$).
Soit $\gamma \in [f(a), f(b)]$. Nous définissons l'application

$$g: \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) = f(x) - \gamma, \end{array}$$

cette application est continue sur I. De plus

$$g(a)g(b) = \underbrace{(f(a)-\gamma)}_{\leq 0}\underbrace{(g(a)-\gamma)}_{\geq 0} \leq 0.$$

D'après le résultat du Théorème 71, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$, *i.e.* il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Remarque 16. *Remarquans que si U est un intervalle inclu dans I, et si α et β appartiennent à $f(U)$, c'est à dire sont de la forme $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, où $a, b \in U$, alors $\forall \gamma \in [\alpha, \beta]$ possède un antécédent c compris entre a et b donc dans U et $\gamma = f(c)$. En conséquence, l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Remarque 17. *1. La propriété de la valeur intermédiaire correspond à une notion intuitive : il est possible de dessiner le graphe de la fonction d'un seul trait de crayon. On dit autrement, il n'est pas nécessaire de soulever son crayon pour dessiner le graphe de la fonction. Cette remarque amène à se poser la question : n'y a-t-il pas équivalence entre la propriété de la valeur intermédiaire et la continuité? La réponse est malheureusement négative. Un contre exemple nous est donné par la fonction réelle de la variable réelle f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0 mais elle satisfait bien la propriété de la valeur intermédiaire pour chaque couple de points dans $\mathbb{R}$.

4.5.2 Image d'un segment par une application continue

le théorème des valeurs intermédiaires dit que l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle. Le théorème suivant dit que l'image d'un intervalle fermé borné par une application continue est un intervalle fermé borné.

Théorème 73.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes inférieure et supérieure, *i.e.* $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) := M$ et $\exists x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) := m$. De plus $f([a,b]) = [m,M]$.

Preuve. On sait déjà grâce au théorème des valeurs intermédiaire que $f([a,b])$ est un intervalle d'extrémités $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) := M$ et $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) := m$. Montrons que M est fini. Supposons par l'absurde que $M = +\infty$. On construit par récurrence deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) de façon que f ne soit pas majorée sur l'intervalle $[u_n, v_n]$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Supposons que u_n et v_n construits et construisons u_{n+1} et v_{n+1}. Posons $w_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, il y a deux possibilités :
• soit f est majorée sur $[u_n, w_n]$, on pose alors $u_{n+1} = w_n$ et $v_{n+1} = v_n$,
• soit f n'est pas majorée sur $[u_n, w_n]$, on pose alors $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = w_n$.
On montre par récurrence que $u_n \le v_n, \forall n$, que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et que

$$v_n - u_n = \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0).$$

Il en résulte que les deux suites sont adjacentes, elles sont donc convergentes vers la même limite x. Comme f n'est pas majorée sur $[u_n, v_n]$, il existe un point k_n vérifiant

$$u_n \le k_n \le v_n \qquad f(k_n) \ge n.$$

Par le théorème de gendarmes, la suite (k_n) converge vers x et par la continuité de f la suite $(f(k_n))$ converge vers $f(x)$, ce qui contredit le fait que $f(k_n) \ge n$. On a donc montrer que M est fini. En considérant $-f$, on montre aussi que m est aussi fini.
Montrons que f atteint M. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas ($\forall x \in [a,b], f(x) \ne M$). Comme le fonction

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

est continue sur $[a,b]$, donc majorée par M' par ce qui est précède. On en déduit alors que

$$f(x) \le M - \frac{1}{M'}, \quad \forall x \in [a,b],$$

ce qui contredit le fait que M est le plus petit des majorants de $f([a,b])$. De la même manière, on montre que m est atteint.

Théorème 74.

Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, I un intervalle d'extrémités a et b et f une application définie sur I continue et strictement croissante, alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I d'extrémités $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.

Preuve. Montrons, à titre d'exemple que si a et b sont finis, et si f est continue et croissante sur $[a,b[$, alors $f([a,b[) = [f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$. On sait que, par le théorème des valeurs intermédiaires, $f([a,b[)$ est un intervalle d'extrémités u et v ($u \le v$). On a $f(a)$ est un minimum de $f([a,b[)$, et donc que $u = f(a)$

appartient à $f([a,b[)$.
Puisque, f est croissante, on a deux possibilités :
ou bien $f([a,b[)$ est majoré alors $\lim_{x\to b} f(x) = \sup f([a,b[)$, donc $v = \sup f([a,b[)$.
ou bien $f([a,b[)$ n'est pas majoré, alors $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$, donc $v = +\infty$.

Remarque 18. *1. Si f est une fonction croissante continue sur I, on a l'égalité*

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)], \quad \forall a,b \in I.$$

2. Si f est une fonction strictement croissante continue on a aussi

$$f(]a,b[) =]f(a), f(b)[, \quad \forall a,b \in I.$$

3. Si f est une fonction décroissante continue sur I, on a l'égalité

$$f([a,b]) = [f(b), f(a)], \quad \forall a,b \in I.$$

4.5.3 Applications réciproques

Le résultat suivant est fort utile : il montre que la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle est encore continue strictement monotone.

Théorème 75.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, f une application continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Notons $J = f(I)$. Alors f est une bijection de I dans J et l'applicatin réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est également strictement monotone et continue sur J et de même sens de varaition que f.

Preuve. Montrons tout d'abord que si f est strictement monotone sur I alors f est injective. Supposons par exemple que f est strictement croissante. Soit alors $x, y \in I$ tel que $x \neq y$ alors ou bien $x < y$ ou bien $x > y$ comme la fonction est strictement monotone alors on a ou bien $f(x) < f(y)$ ou bien $f(x) > f(y)$. Ce qui implique que $f(x) \neq f(y)$ et donc f est injective. On en déduit que f est une bijection de I dans $f(I) = J$ qui est bien un intervalle puisque f est continue.
Supposons, par exemple que f est strictement croissante et montrons alors que f^{-1} est aussi strictement croissante. Considérons y_1 et y_2 de J tels que $y_1 < y_2$, il existe deux point $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$, ou d'une façon équivalente, $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Si on avait $x_1 \leq x_2$, comme f est croissante, on aurait $f(x_1) \geq f(x_2)$, ce qui contredit le fait que $y_1 < y_2$. Donc, $x_1 < x_2$, en d'autre termes

$$y_1 > y_2 \Longrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Par suite f^{-1} est strictement croissante.

Remarque 19. *Les graphes des fonctions f et f^{-1} dans des axes orthonormées sont symétrique par rapport à la première bissectrice.*

Exemple 15. *1. Sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $f : x \longmapsto \sin(x)$ est continue et strictement croissante et impaire. C'est donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $f(I) = [-1,1]$. Elle possède une application réciproque continue strictement croissante et impaire qui est bijection de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On note cette application $f^{-1}(x) = \arcsin x$.*
2. Sur l'intervalle $[0,\pi]$, la fonction $f : x \longmapsto \cos(x)$ est continue et strictement croissante et paire. C'est donc une bijection de $[0,\pi]$ sur $f(I) = [-1,1]$. Elle possède une application réciproque continue strictement croissante et paire qui est bijection de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$. On note cette application $f^{-1}(x) = \arccos x$ et on a la relation

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi.$$

On vérifie aussi que

$$\forall x \in [-1,1],\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

3. Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, *la fonction* $f : x \longmapsto \tan(x)$ *est continue et strictement croissante et impaire. C'est donc une bijection de* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *sur* $f(I) = \mathbb{R}$. *Elle possède une application réciproque continue strictement croissante et impaire qui est bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. *On note cette application* $f^{-1}(x) = \arctan x$. *On vérifie que*

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

4.6 Applications uniformément continues

Définition 76.

On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in I^2\ (|x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Exemple 16. *1. Toute fonction uniformément continue est continue sur* I. *La réciproque est fausse? Par exemple la fonction* $x \mapsto x^2$ *est continue sur* R *sans y être uniformément continue.*
2. La fonction $g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = \sqrt{x}$ *est uniformément continue sur* $[0,+\infty[$.

Exemple 17. *(Théorème de Heine 1821 -1881) Toute fonction continue sur un segment* $[a,b]$ *est uniformément continue sur* $[a,b]$.

Preuve. Nous montrons ce résultat par l'absurde. Pour cela nous supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$. Il existe donc $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout $n > 0$, on puisse trouver $x_n \in [a,b]$ et $y_n \in [a,b]$ vérifiant $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Nous construisons ainsi deux suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ qui sont borées. D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass, nous pouvons extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$, une suite $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ qui converge vers une limite, notée $l \in [a,b]$. Comme nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, |y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}| \leq \frac{1}{\phi(n)}$, la suite extraite $(y_n)_{n\geq 1}$ converge aussi vers la même limite l. Puisque f est continue en l, les suites $(f(x_{\phi(n)}))_{n\geq 1}$ et $(f(y_{\phi(n)}))_{n\geq 1}$ convergent toutes les deux vers $f(l)$. Il existe donc q dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq q$,

$$|f(y_{\phi(n)}) - f(x_{\phi(n)})| \leq \varepsilon.$$

ce qui est contradictoire. ∎

Chapitre 5

Exercices

Exercice 1

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide. On pose $-A = \{-a : a \in A\}$.
Montrer que :

$$\inf(-A) = -\sup(A) \quad \text{et} \quad -\inf(A) = \sup(-A).$$

Exercice 2

Etant donné A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. On pose $A + B = \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$ et $A - B = \{a - b : (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que :
   i. $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$.
   ii. Etablir des formules semblables pour $\inf(A + B)$ et $\inf(A - B)$.
2. On définit $A.B = \{ab : (a, b) \in A \times B\}$ et $\frac{1}{A} = \{\frac{1}{a} : a \in A\}$. Montrer que si tous les éléments de A et B sont strictement positifs, on a
   i. $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$,
   ii. $\sup(\frac{1}{A}) = \frac{1}{\inf(A)}$, si $\inf(A) > 0$.
2. On suppose que $A \subseteq B$. Montrer que si B est majorée, il en est de même de A, et qu'alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.
   L'inégalité est-elle stricte si l'inclusion est stricte?
3. Montrer que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\} \quad \text{et} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}.$$

Exercice 3

Soient deux réels distincts quelconque $a < b$. Nous allons montrer d'abord qu'il existe au moins un rationnel r dans l'intervalle $]a, b[$ puisqu'il en existe une infinité.
1. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q tel que $b - a > \frac{1}{q}$.
2. En utilisant la définition de la partie entière du réel x montrer la propriéte suivante:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! p \in \mathbb{Z} \text{ tel que } p < x \leq p + 1.$$

3. Montrer que :

$$\exists! p \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad \frac{p}{q} < b \leq \frac{p+1}{q}.$$

4. Montrer que $a < \frac{p}{q}$. En déduire que $a < \frac{p}{q} < b$.
5. Enoncer le résultat des questions 1, 2, 3 et 4.

Soit l'ensemble $A = \{r \in \mathbb{Q} : a < r < b\}$. Nous allons montrer que A est infini.
6. Supposer tout d'abord que A est fini, trouver une contradiction.
7. Enoncer le résultat obtenu à la question 6.

Exercice 4

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$, alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire que : entre 2 nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 5

Soit f une application croissante de l'intervalle $[0,1]$ dans lui même, et soit

$$A = \{x \in [0,1] \mid x \leq f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne supérieure. On pose $a = \sup A$.
2. Justifier que $a \in [0,1]$.
3. Montrer que $f(a)$ est un majorant de A. En déduire que $f(a) = a$.

Exercice 6

Dans chacune des cas suivants, préciser si la partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément et les déterminer s'il y a lieu:

a. $A = [-1, 4[$

b. $A = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

c. $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\alpha, \beta - \frac{1}{n}]$, avec $\alpha < \beta$,

d. $A = \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

e. $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$

f. $A = \{3 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

g. $A = \{4 + 7n : n \in \mathbb{N}\}$

h. $A = \{n \in \mathbb{Z} : 3n \leq 14\}$.

Exercice 7

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Soit M (resp. m) un majorant (resp. minorant) de A.

1. Montrer que $M = \sup(A)$ (resp. $m = \inf(A)$) si et seulement si il existe une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans A de limite M (resp. m).

2. Préciser les bornes supérieures et inférieures de la partie A définie par :

$$A = \{u_n = (-1)^n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \qquad A = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\}.$$

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{u_m,\ m \geq n\}$.

1. Vérifier que $A_{n+1} \subseteq A_n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \inf(A_n)$ et $W_n = \sup(A_n)$. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elles sont convergentes.

3. On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   Calculer $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ pour les suites $(u_n)_n = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_n = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9

Soit f une application croissante de l'intervalle $[0,1]$ dans lui même, et soit

$$A = \{x \in [0,1] \mid \forall t \in [0,x] :\ t < f(t)\}.$$

Le but de ce problème est de démontrer que f possède un point fixe, i.e. $\exists a \in [0,1] : f(a) = a$.

1. Montrer que si $f(0) \neq 0$ alors A admet une borne supérieure. On pose $a = \sup A$.

2. Justifier que $a \in [0,1]$.

3. Montrer que $a = \sup(A)$ implique qu'il existe une suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A de limite a et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq a$.

4. Montrer que $f(a) \geq a$.

5. Si $a = 1$, conclure.
   Dans la suite, on suppose que $0 < a < 1$. On veut démontrer que $f(a) \leq a$.

6. On suppose qu'il existe $t_1 \in [0,a[: t_1 \geq f(t_1)$, montrer que : $\forall x \in A,\ x \leq t_1$.
7. En déduire que $\forall t \in [0,a[$ on a $t < f(t)$.
8. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}^* : a + \dfrac{1}{N} < 1$ et montrer ensuite que la propriété suivante est fausse

$$(\mathcal{P}) \quad \exists n \geq N : \forall t \in [a, a+\frac{1}{n}],\ t < f(t).$$

Indication : montrer que si $(\mathcal{P})$ est vraie entraine que $a + \dfrac{1}{n} \in A$.

9. Montrer que $\forall n \geq N$, il existe une suite $(t_n)_n$ telle que $t_n \in [a, a+\dfrac{1}{n}] : t_n \geq f(t_n)$.
10. Montrer que $\forall n \geq N,\ f(t_n) \geq f(a)$.
11. En déduire que $a \geq f(a)$ et conclure.

Exercice 10

Soient a et b deux réels strictement positifs.
On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n},\ v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Prouver que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer sa valeur.
3. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente, puis calculer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!} & \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Démontrer que $\quad 2^{n-1} \leq n!$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et que pour tout $n \geq 0, \quad u_n \leq 3$.
3. En déduire que la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Exercice 12

Pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n(x) = \frac{E(x) + E(2x) + \ldots + E(nx)}{n^2}.$$

1. Montrer qu'on a l'encadrement suivant :

$$\frac{x(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} < u_n(x) \leq \frac{x(n+1)}{2n}.$$

2. Montrer que la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.

Exercice 13

On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Prouver que la $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$. En déduire que
$$2(\sqrt{n}-1) \leq u_n \leq 2\sqrt{n}.$$
3. Montrer que les suites $(v_n) = (u_n - 2\sqrt{n})$ et $(w_n) = (u_n - 2\sqrt{n+1})$ sont adjacentes.
4. Déduire les limites des suites de termes généraux :
$$a_n = \frac{u_n}{n},\ b_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 14 : (e est un irrationnel)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$.

1. Démontrer que cette suite est croissante.
2. Soit $(v_n)_n$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
3. Démontrer que, pour tout couple (p,q) d'éléments de $\mathbb{N}^*$, on a : $u_p \leq v_q$. Déduire que chacune des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ est convergente.
4. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, et monter que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n < \ell < v_n$.
5. On admet que $\ell = e$ et on propose de monter que e est un irrationnel.
   i. Supposer que e est un rationnel c-à-d $e = \dfrac{p}{q}$ avec $p,q \in \mathbb{N}^*$ et montrer que l'on a $u_p q! < p(q-1)! < u_q.q! + 1$.
   ii. Dire si cette inégalité est-elle possible? Conclure.

Exercice 15 : (Suites récurrentes : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$)

Soient a et b deux réels tels que $b \neq 0$. On désigne par E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1. Monter que tout élément u de E est déterminé de manière unique par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1.
2. Soient α et β deux réels et soient u et v deux éléments de E. Monter que la suite $\alpha u + \beta v \in E$.
3. Monter que, s'il existe une suite géométrique de E de premier terme 1, sa raison q est une solution réelle de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.
4. On suppose $a^2 + 4b > 0$. On désigne par q_1 et q_2 les deux racines réelles distinctes et non nulles de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.
   (a) Montrer que les suites $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à l'ensemble E.
   (b) Déduire que toute suite $(\alpha q_1^n + \beta q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où α et β sont deux réels, appartient à E.
   (c) Soient deux réels u_0 et u_1 et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E dont les deux premiers termes sont u_0 et u_1. Monter qu'il existe un couple unique (α,β) de réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$. Déduire l'ensemble E.

5. Application : Suite de Fibonacci
La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
   (a) Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.
   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$. Monter que $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
   (c) Déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, appelé nombre d'or.
   (d) Application : La reproduction des lapins !!!
   Un couple de lapins doit être âgé de deux mois pour donner naissance à un autre couple de lapins. Sachant qu'initialement il y a un seul couple, donner le nombre de couples de lapins pour les n mois suivants.

Exercice 16

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si $A \subseteq B$ alors $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.
3. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Peut-on avoir toujours $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?
4. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$. Cette égalité est-elle vraie pour une réunion infinie?
5. Si $A \subseteq B$ alors $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.
6. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
7. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$. Peut-on avoir toujours $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$?

Exercice 17

1. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre :

   a. $A =]-1,1[\cup[2,3[$ *b.* $A =]3,4[\cup\{0\}$ *c.* $A = [2,3]\cup\{0\}$
   d. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ *e.* $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 3\}$ *f.* $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\}$
   g. $A = \{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ *h.* $A = \{(-1)^n - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.

2. Monter que 3 est un point adhérent à $A =]3,4] \cup \{5\}$. 3 Est-il point d'accumulation? 5 est-il un point d'accumulation de A?

Exercice 18

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que A est convexe si, et seulement si,

$$\forall x, \forall y \in A, \forall t \in [0,1],\ (1-t)x + ty \in A.$$

1. Montrer que $]3,4] \cup \{5\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne sont pas convexes.
2. Montrer que A est convexe si et seulement si, $\forall x, \forall y \in A$, $[x,y] \subseteq A$.
3. Montrer que, si A est convexe, son adhérence $\overline{A}$ et son intérieur $\overset{\circ}{A}$ sont convexes aussi.
4. Soient A une partie convexe de $\mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, ..., x_n$ des points de A et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des réels positifs ou nuls vérifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in A.$$

5. Montrer que : A est un convexe de $\mathbb{R}$ si et seulement si A est un intervalle.

6. Soit A une partie non vide et convexe dans $\mathbb{R}$. Montrer que

   a. si A n'est ni majorée ni minorée alors $A = \mathbb{R}$.

   b. si A est minorée et non majorée (resp. non minorée et majorée) alors A est un intervalle de type $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, b[$ ou $]-\infty, b]$).

   c. si A est bornée alors A est un intervalle de type $[a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Exercice 19

1. Soient x, y deux réels tels que $y - x > 1$. Montrer qu'il existe un unique p dans $\mathbb{Z}$ tel que $x < p < y$.

2. On va montrer que l'ensemble D des réels de la forme $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ où m et n décrivent $\mathbb{N}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

   a. Trouver la limite de la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

   b. Montrer que pour tous couple (a, b) de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$, on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{N+1} - \sqrt{N} < b - a$.

   c. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a < p(\sqrt{N+1} - \sqrt{N}) < b$.

   d. Déduire que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 20

On va montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p + q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que D est stable par addition et multiplication.

2. Posons $v = \sqrt{2} - 1$, montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver un entier $N \geq 1$ tel que $0 < v^N < b - a$.

3. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a < mv^N < b$.

4. Déduire que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 21

Montrer que la partie A définie par :

$$A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$$

est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Exercice 22

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < \frac{1}{2}$, tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq k(|f(x) - x| + |f(y) - y|) \qquad (1).$$

Le but de cet exercice est de démontrer que f possède un unique point fixe $a \in \mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe un unique point $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = a$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Montrer que $a = b$.

   On définit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}$ de la manière suivante : $x_0 \in \mathbb{R}$ est quelconque et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad x_{n+1} = f(x_n)$

2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|.$$

3. En déduire que, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^n |x_1 - x_0|.$$

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{1-k}{1-2k}\left(\frac{k}{1-k}\right)^n |x_1 - x_0|.$$

5. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}$. On notera a sa limite.

6. Vérifier $f(a) = a$. Pour cela, on utilisera l'inégalité (1) avec $x = x_k$ et $y = a$.

7. Conclure.

Exercice 23

Soit G, un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, c'est à dire un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour la loi $+$, non réduit à $\{0\}$. On note G_+^* l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^*$.

1. Démontrer que $\inf G_+^*$ existe. On la notera dans la suite par α.

2. Vérifier que si $g \in G$ alors $\forall n \in \mathbb{Z}, ng \in G$.

3. Premier cas : on suppose que $\alpha = 0$.

   a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,\ \exists g_1 \in G :\ g_1 E(\dfrac{x}{g_1}) \leq x < g_1 E(\dfrac{x}{g_1}) + g_1$.
   b. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in G$ tel que $|x - g| < \varepsilon$.
   c. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Deuxième cas : on suppose que $\alpha > 0$.

   a. Démontrer que nécessairement, on a : $\alpha \in G$.
   b. Démontrer que le groupe $\alpha\mathbb{Z} := \{\alpha n, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous groupe de G.
   c. Montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$. (Indication : supposer, pour un $g \in G$, que $\dfrac{g}{\alpha} \notin \mathbb{Z}$ mène à une contradiction.)

5. Conclure.

6. On considère $a \notin \mathbb{Q}$; montrer que $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif dense de $\mathbb{R}$.

Exercice 24 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } & x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Etudier les suites $(f(\dfrac{1}{n+1}))_{n\geq 1}$ et $(f(\dfrac{\pi}{n^2}))_{n\geq 1}$, en déduire que f n'a pas de limite en 0.

Exercice 25 Soit f une fonction $T-$périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\text{si} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = l \quad \text{alors} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = l.$$

Qu'en déduire pour les fonctions sinus et cosinus ?

Exercice 26 Soit f la fonction définie par :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}.$$

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 27 Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 \text{ si } & x<-1 \\ a \quad\quad \text{ si } & x=-1 \\ (ax+b)^2 \text{ si } & x>-1, \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28 Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes?

Exercice 29

1. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(2x)$. Montrer que f est constante.
2. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x)=f(x)\cos x$. Montrer que f est de la forme
$$f(x)=\begin{cases} \alpha\dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ \alpha & \text{si} \quad x=0, \end{cases}$$
où $\alpha\in\mathbb{R}$ (montrer d'abord que : $\sin x=2^n\sin(\frac{x}{2^n})\cos(\frac{x}{2^n})\ldots.\cos(\frac{x}{2^2})\cos(\frac{x}{2}))$.

Exercice 30

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout x réel, $|f(x)|\leq|\sin x|$. Cette application est-elle coninue en 0.
2. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?
$$a.\quad f(x)=\sin x\sin(\frac{1}{x}) \qquad\qquad b.\quad f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}.$$

Exercice 31 Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. On veut démontrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x)=\sup_{a\leq x\leq b} f(x).$$

1. Montrer que $\sup\limits_{a<x<b} f(x)\leq\sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$.
2. Soit $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)=\sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$. Montrer que $f(x_0)=\sup\limits_{a<x<b} f(x)$ en distinguant les trois cas : $x_0=a$, $x_0=b$ et $x_0\in]a,b[$. Indication : Dans le cas $x_0=a$, on pourra considérer, par exemple, la suite de réels $u_n=a+\dfrac{1}{n}$ et étudier la suite $(f(u_n))_n$.
3. Le résultat reste-il vrai si la fonction f n'est pas continue?

Exercice 32 Soit f et g deux applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, telles que $f\circ g=g\circ f$. On veut démontrer suivante : "il existe $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=g(c)$".

1. On pose $h(x)=f(x)-x$. Montrer qu'il existe $s\in[0,1]$ tel que $h(s)=0$. En déduire que pour tout entier $n\geq 0$, $g^n(s)=f(g^n(s))$.
2. On pose $u_n=g^n(s)$. Vérifier que $f(u_n)=u_n$ et $g(u_n)=u_{n+1}$.
3. On suppose que la suite $(u_n)_n$ est monotone. Montrer qu'elle a alors une limite l. Que peut-on dire de $f(l)$ et $g(l)$.

4. On suppose que la suite $(u_n)_n$ n'est pas monotone, montrer qu'il existe des nombres u et v tels que $(f-g)(u)(f-g)(v)$ soit négatif. Conclure.

Exercice 33 Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=c$. Le point c est-il unique? Qu'en est-il si l'on suppose de plus que f est décroissante sur $[a,b]$.

Exercice 34 Soit f une application définie et continue sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et telle que

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)+f(y).$$

1. Calculer $f(0)$, puis montrer que pour tout x réel,
$$f(-x)=-f(x).$$
2. Montrer que pour tout entier n et tout x réel
$$f(nx)=nf(x).$$
3. Montrer que pour tout rationnel q et tout x réel
$$f(qx)=qf(x).$$
4. Montrer que pour tout réel λ et pout réel x
$$f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

Exercice 35 Les applications suivantes sont-elles uniformément continues :

$$a)\ f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\mapsto x^2\qquad b)\ f:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{1}{x}$$
$$c)\ f:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\mapsto\ lnx.$$

Exercice 36 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application pour laquelle il existe $k\in\mathbb{R}$, $0<k<1$, tel que

$$|f(x)-f(y)|\le k|x-y|,\quad\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Une telle application est appelée contractante et k appelée une constante de contraction. Notre but est de démontrer que f possède un unique point fixe a *i.e.* $\exists! a\in\mathbb{R}: f(a)=a$.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que s'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=a$, alors a est unique.
3. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fixant $x_0\in\mathbb{R}$ et en posant $x_{n+1}=f(x_n)$ ($i.e\ x_{n+1}=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{(n+1)\ fois}(x_0):=f^{n+1}(x_0)$).
   a. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a
   $$|x_{n+1}-x_n|\le k^n|x_1-x_0|.$$
   b. En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que pour tout $n,m\in\mathbb{N}$ on a
   $$|x_{n+m}-x_n|\le\frac{(1-k^m)}{1-k}k^n|x_1-x_0|.$$
   c. Déduire que $|x_{n+m}-x_n|\longrightarrow 0$ quand $m,n\to+\infty$ et par suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
   d. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point a et que $f(a)=a$.

Application :

Montrer que l'application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}.x$ admet 0 comme unique point fixe.