Devoir : à remettre avant le 16/11/2011

Exercice 1 : On cherche à montrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

1. Calculer la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.
2. On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$. Montrer que $H_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$
3. Calculer un développement limité à l'ordre 3 de $n\ln(1+\frac{1}{n})$ quand n tend vers $+\infty$.
4. On pose On pose $u_n = H_n - n\ln(n) + n$.
   (a) Montrer que que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ est divergente.
   (b) En déduire un équivalent de la suite $(u_n)_n$.
5. On pose On pose $v_n = u_n - \frac{1}{2}\ln(n)$.
   (a) Montrer que la série de terme général $v_n - v_{n-1}$ est convergente.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_n$ converge vers un nombre C et que
   $$H_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + C + o(1).$$
6. En admettant que $C = \ln(\sqrt{2\pi})$, déduire la formule de Stirling :
   $$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 2 : Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs divergente. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ est divergente.