Exercice 1. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes intégrables de même loi. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est indépendante de la variable N. On pose

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad N = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} X_i & \text{si} \quad N \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que Z est une variable aléatoire.
2. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.
3. On suppose que les variables X_i sont de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ $(P\{X_i = 1\} = p)$ et N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

   Déterminer la loi de Z.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que la suite $(\frac{X_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la suite $(\frac{X_n}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans L^1 vers 0.
3. Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers une limite que l'on déterminera.
4. Soit l'événement $A_n = \{\omega : X_n(\omega) < 2\ln(n)\}$.
   (a) On note par A l'ensemble tel que : $\omega \in A$ équivalent à ω appartient à tous les A_k sauf peut-être un nombre fini". Ecrire A avec des symboles $\bigcap$ et $\bigcup$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi μ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{N} f(X_k)\Big) = \mathbb{E}(N) \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x).$$

Exercice 4. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Soit $r > 0$.

1. Donner la limite presque sûre, en probabilité et en loi de la suite $(\frac{S_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big(\frac{1}{2}\Big)^n f\Big(\frac{k}{n}\Big) = f(\frac{1}{2}).$$

3. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2} + r\Big] \leq \mathbb{P}\Big[e^{\lambda S_n} \geq e^{n\lambda(\frac{1}{2}+r)}\Big] \leq \Big(ch\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)\ e^{-\lambda r}\Big)^n.$$

4. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2} - r\Big] \leq \mathbb{P}\Big[e^{-\lambda S_n} \geq e^{-n\lambda(\frac{1}{2}-r)}\Big] \leq \Big(ch\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)\ e^{-\lambda r}\Big)^n.$$

5. En déduire, en utilisant l'inégalité $ch(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$, que

$$\mathbb{P}\Big[\Big|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\Big| \geq r\Big] \leq 2e^{-2nr^2}.$$

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la loi de $Y = aX_1$ et calculer sa fonction caractéristique φ_Y.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Quelle est la loi de S_n.
   (b) Calculer l'espérance de $Y_n = e^{S_n - \frac{n}{2}}$.
   (c) Déterminer la limite presque sûre, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\dfrac{S_n}{n}$.
   (d) En déduire la limite presque sûre, lorsque n tend vers $+\infty$, de Y_n.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1.

1. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer la loi de S_n, puis donner la limite presque sûre et en probabilité de la la suite $(\frac{S_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. On pose $Y_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on donnera la loi.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} f\Big(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\Big)\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Exercice 7. (*Formule de Stirling*)

1. Soit Z une variable aléatoire réelle de carré intégrable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que pour tout $a > 0$, on a :

(a) $\mathbb{E}|Z - \min(Z, a)| \leq \mathbb{E}[Z 1_{\{Z \geq a\}}]$.

(b) $\mathbb{E}|Z - \min(Z, a)| \leq (\mathbb{E}[Z]^2)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{P}[Z \geq a])^{\frac{1}{2}}$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose maintenant que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

2. Calculer la loi de S_n, $\mathbb{E}(S_n)$ et $Var(S_n)$.

3. Montrer que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on donnera la loi.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $h(x) = \max(-x, 0)$.

4. (a) Montrer que $h(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qu'on déterminera.

   (b) En déduire que
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[\min(h(Y_n), a) - \min(h(Y), a)] = 0.$$

5. (a) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)^2$. En déduire que pour tout $a > 0$, on a $\mathbb{P}[h(Y_n) \geq a] \leq \dfrac{1}{a^2}$.

   (b) En déduire que pour tout $a > 0$, $\mathbb{E}|h(Y_n) - \min(h(Y_n), a)| \leq \dfrac{1}{a}$.

6. Soit $a > 0$ fixé. Montrer que $\mathbb{P}[h(Y) \geq a] \leq \dfrac{1}{a^2}$. En déduire que
$$\mathbb{E}|\min(h(Y), a) - h(Y)| \leq \frac{1}{a}.$$

7. En déduire, de ce qui précède, que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(h(Y_n)) = \mathbb{E}(h(Y))$.

8. Calculer $\mathbb{E}(h(Y_n))$ et $\mathbb{E}(h(Y))$ pour tout $n \geq 1$.

9. En déduire la formule de Stirling :
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad i.e. \ n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} e^{-n} n^n \sqrt{n}.$$