



Exercice 1. Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans \mathbb{N}^* , telles que pour tous i, j de \mathbb{N}^*

$$\mathbb{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{a}{2^{i+j}},$$

1. Calculer a
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
3. X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2. Soit X une v.a.r discrète dont la loi est donnée par :

Valeurs de X	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On considère la variable $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y) .
2. X et Y sont-elle indépendantes ?
3. Calculer $Cov(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

Exercice 3. On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par:

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

On considère la variable $Y = X^2$. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

Exercice 4. Soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p . On note $Y = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p .
2. En déduire que si X et Z deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ alors $X + Z$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Exercice 5. Une machine à embouteiller peut tomber en panne. La probabilité d'une panne à chaque emploi est de 0,01. La machine doit être utilisée 100 fois. Soit X le nombre de pannes obtenues après 100 utilisations.

1. Quelle est la loi de X .
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X \geq 4)$.
3. On estime le coût d'une réparation à 500 Dhs. Soit Y la variable aléatoire représentant la dépense pour les réparations après 100 utilisations. Exprimer Y en fonction X et calculer $\mathbb{E}Y$ et $Var(Y)$.

Exercice 6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p, q \in]0, 1[$ respectivement. Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit diagonalisable?

$$\begin{bmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$