Exercice 1. Soient α un réel strictement positif et X la variable aléatoire de densité f_X définie par (loi de Pareto):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X. Calculer : $\mathbb{P}(0 < X \leq 2)$.
3. Pour quelles valeurs de α, X admet une espérance et une variannce. Les calculer quand elles existent.
4. On pose $Y = \ln(X)$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq 0)$.
   (b) Calculer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire la loi de Y.

Exercice 2. Soit X la variable aléatoire de densité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de X.
4. On pose $Y = X^2$.
   (a) Déterminer la fonction densité g de la variable aléatoire Y.
   (b) Donner la loi de Y. En déduire la variance de X.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$D(x) = 1 - F(x), \text{ et } \pi(x) = \frac{f(x)}{D(x)}.$$

où F est la fonction de répartition de X.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout réel $h > 0$, on pose

$$G(x,h) = \mathbb{P}\Big[x < X \leq x + h \mid X > x\Big].$$

   (a) Montrer que pour tout $h > 0$

$$G(x,h) = \frac{D(x) - D(x+h)}{D(x)}.$$

(b) Justifier que la fonction D est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et préciser sa fonction dérivée D'.

(c) Calculer

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{G(x,h)}{h}.$$

2. On suppose maintenant que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\quad \pi(x) = \dfrac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

(b) En utilisant la question 1.(c), retrouver la valeur de $\pi(x)$.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X est une variable discrète telle que

$$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}.$$

Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On considère la variable aléatoire définie par $Z = XY$. On note F_Z la fonction de répartition de Z et F_Y celle de Y.

1. Montrer que, pour tout z réel, $F_Z(z) = \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}(1 - F_Y(-z))$.

2. Déterminer la loi de Z.

Exercice 5. 1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$,

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1},\ k > 0.$$

(a) Calculer $\mathbb{P}(X > n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Calculer pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^*$, $\ \mathbb{P}(X > n + k \mid X > k)$.

2. Soit Y une variable aléatoire discrète indépendante de X de loi géométrique de paramètre $q \in]0,1[$. On pose $Z = \min(X,Y)$ et $R = X + Y$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En déduire que Z suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.

(c) Donner les valeurs de la variable aléatoire R et déduire sa loi.

Exercice 6. On rappelle que la densité d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x).$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

2. Calculer la fonction de répartition F_X de X.

3. Soit maintenant $t > s \geq 0$. Montrer que: $\ \mathbb{P}(X \geq t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t - s)$.

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

5. **Application** : on suppose maintenant que X représente la durée de vie en années d'une télévision et $\lambda = \frac{1}{8}$.
   (a) Calculer la probabilité que la télévision que vous venez d'acheter ait une durée de vie supérieure à 8 ans.
   (b) Vous possédez une télévision depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore supérieure 8 ans à partir de maintenant? Conclusion.

6. Soit Z et Y deux variables aléatoires indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(Z+Y)$ et $Var(Z+Y)$. En déduire que la variable aléatoire $Z+Y$ ne suit pas la loi exponentielle.
   (b) On note $H = min(Z,Y)$.
      i. Ecrire l'événement $\{H \geq t\}$ en fonction des événements $\{Z \geq t\}$ et $\{Y \geq t\}$.
      ii. Calculer $\mathbb{P}(H \geq t)$ pour $t \geq 0$ et $t < 0$.
      iii. En déduire la fonction de répartition F_H de H, puis la loi de H.

Exercice 7. Soit un couple de variables aléatoires (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, et $p \in]0,1[$ telles que pour tous k,n de $\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\Big[X = k,\, Y = n\Big] = \begin{cases} C_n^k a^n p(1-p)^n & \text{si} \quad k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$.
2. Calculer a
3. Déterminer la loi de Y.

Exercice 8. Soit un couple de variables aléatoires (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, telles que pour tous i,j de $\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\Big[X = i,\, Y = j\Big] = \frac{a}{i!j!}.$$

1. Calculer a
2. Déterminer les lois marginales de X et Y et les identifier avec les lois usuelles.
3. X et Y sont-elles indépendantes?