Exercice 1. Etablir que si $1 \leq k \leq n$

$$C_n^k = \sum_{j=k-1}^{n-1} C_j^{k-1}.$$

Exercice 2. Pour tout entier naturel r, on pose

$$S_r = 1^r + 2^r + ... + n^r = \sum_{k=1}^{n} k^r.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel r, $\sum_{k=0}^{r} C_{r+1}^k S_k = (n+1)^{r+1} - 1$.
2. En déduire l'expression de S_0, S_1, S_2 et S_3 en fonction de n.

Exercice 3. Combien peut-on définir sur l'ensemble $\Omega = \{a, b, c\}$ de probabilités $\mathbb{P}$:

1. telles que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = \frac{1}{4}$,
2. telles que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = \mathbb{P}(\{b, c\}) = \frac{1}{4}$,
3. telles que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = \mathbb{P}(\{b, c\}) = \frac{3}{4}$.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements de $\mathcal{F}$ tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :

1. A et B sont des événements indépendants.
2. L'événement A implique l'événement B.
3. $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{3}$.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements de $\mathcal{F}$ quelconques.

1. Montrer que si $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ alors $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) - (\mathbb{P}(A))^2$.
2. Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - x^2$. En déduire que
$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}.$$
3. Donner un exemple pour lequel il y a égalité dans cette dernière inégalité

Exercice 6. Une voiture a une chance sur cent d'avoir une fuite d'huile lors d'un certain trajet. Si elle a une fuite d'huile, le témoin d'huile reste éteint (n'est pas allumé) avec un probabilité de 0.01. Le témoin d'huile a également une probabilité 0.05 de s'allumer alors qu'il n'y a pas de fuite d'huile. On note par F et T les événements suivants : $F =$"la voiture a une fuite d'huile", $T =$"le témoin d'huile est allumé".

1. Calculer $\mathbb{P}(T)$.
2. Le témoin s'allume. Quelle est la probabilité d'avoir effectivement une fuite d'huile ?

Exercice 7. Cette année, 29 des 79 étudiants SMA-SMI S3 à la Faculté Polydiscilinaire de Safi sont des filles et 50 ont moins de 21 ans. D'autre part, 64% des moins de 21 ans sont des garçons. Déterminer la proportion de moins de 21 ans parmi les filles.

Exercice 8. Une étude épidémiologique concernant une certaine maladie a été faite dans des familles ayant 2 enfants de moins de 10 ans : une fille et un garçon. On a constaté que 20% des filles et 50% des garçons sont touchés par la maladie. Par ailleurs, dans les familles, sachant que la fille est touchée par la maladie, le garçon l'est aussi dans 70% des cas.
On choisit par hasard une famille ayant fait l'objet de cette étude. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A =: " Les deux enfants sont atteints par la maladie ".
2. B =: " Au moins un des deux enfants est atteint ".
3. C =: " Aucun des enfants n'est atteint ".
4. D =: " Sachant que le garçon est atteint, la fille l'est aussi ".
5. E =: " Sachant que le garçon n'est pas atteint, la fille l'est ".

Exercice 9. Un laboratoire pharmaceutique vend un test avec la notice suivante : si un sujet est malade (événement M), alors le test est positif (événement P) avec probabilité α, si un sujet est sain (événement S), alors le test est positif avec probabilité β. Sachant qu'en moyenne il y a un malade sur τ^{-1} personnes.

1. Calculer la probabilité pour que le sujet soit sain alors que son test est positif.
2. Notons par N l'événement "le test est négatif". Calculer la probabilité d'être malade alors que le test est négatif.

Application numérique : $\alpha = 0.98$, $\beta = 0.03$ et $\tau^{-1} = 1000$.

Exercice 10. Une urne U contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne V contient une boule rouge et neuf boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne U, sinon il tire au hasard une boule de l'urne V.

1. Soit R l'événement "le joueur obtient une boule rouge". Calculer la probabilité $\mathbb{P}(R)$.
2. Si le joueur obtient une boule rouge, calculer les probabilité qu'elle provienne de U et V respectivement.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 2, 4, 6, 8 et 10. Déterminer la loi de probabilités de X sachant que

$$\mathbb{P}(X < 6) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X > 6) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4), \quad \mathbb{P}(8 < X \leq 10) = \frac{1}{8}.$$

Exercice 12. Une urne contient deux vertes et trois rouges indiscernables au toucher.

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

(a) Calculer la loi de probabilité de X. En déduire $\mathbb{E}(X)$.

(b) Calculer la probabilité de l'événement A :=" les deux boules tirées sont de même couleur".

2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la régle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne; si elle est verte, on ne la remet pas.

   a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
      B =: "seule la première boule tirée est verte",
      C =: "une seule des deux boules tirées est verte".

   b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée?.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire définie sur l'intervalle $[1, 3]$. Sa fonction de densité de probabilité f est continue et de la forme

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b & \text{si} \quad x \in [1,3] \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a et b.

2. Calculer la fonction de répartition F_X de X. En déduire $P(X > 2)$.

3. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \sqrt{X}$. Donner la fonction de répartition F_Y de Y.

4. Calculer la fonction densité g de Y.

5. Calculer $E(Y)$.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} K\dfrac{(x + \ln(x))}{x^2} & \text{si} \quad 1 \le x \le e \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer K.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ si ces réels existent.