Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \{u_m,\ m \geq n\}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \inf(A_n)$ et $W_n = \sup(A_n)$. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elles sont convergentes.

2. On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\geq 0} \inf\limits_{m\geq n} u_m$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\geq 0} \sup\limits_{m\geq n} u_m$.
   Calculer $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ pour les suites $(u_n)_n = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_n = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 Soient x un nombre réel et $(u_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \dfrac{\left[10^n x\right]}{10^n}$, où $[x]$ représente la partie entière d'un réel x.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers x.
   On pose $a_0 = u_0 = [x]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+1} = 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n)$.

2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq a_{n+1} \leq 9$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$.

3. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{10^n}$. Montrer que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes qui convergent vers x avec $u_n \leq x \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   u_n est appelée l'approximation décimale par défaut à 10^n près de x et v_n l'approximation décimale par excès à 10^n près.

Exercice 3 Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces probabilisables et $\mathcal{C}$ une classe de parties de E.

1. Montrer que : $\sigma(X^{-1}(C)) = X^{-1}(\sigma(C))$.

2. On suppose que : $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Montrer que X est une varibales aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ si et seulement si $X^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

3. En déduire qu'une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle ssi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{X \geq t\} \in \mathcal{F}$.

4. On suppose que E un espace topologique et $\mathcal{E}$ la tribu engendrée par la classe des ouverts de E. Montrer que toute fonction continue $X : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est mesurable.

Exercice 4 Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f a une limite à droite et une limite à gauche en tout point. On note $f(x+)$ et $f(x-)$ ces limites au point x.

2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable. On pourra considérer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles

$$A_n = \left\{x \in [0, 1, \quad f(x+) - f(x-) \geq \frac{f(1+) - f(0-)}{n}\right\}.$$

Exercice 5 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit, pour tout $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega$,

$$S_n(\omega) = \text{le nombre d'entiers } k \in \{1, ..., n\} \text{ tels que } X_k(\omega) = 1.$$

1. Déteminer la loi de S_n . Les variables $(S_n)_{n\geq 1}$ sont-elles indépendantes?

2. On définit, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$T_1(\omega) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) = 1\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Déterminer la loi de T_1.

Exercice 6 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et F la fonction de répartition de X_1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire définie par

$$Z_k = \max(X_i : 1 \leq i \leq k) = \max(X_1, X_2, ..., X_k).$$

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer la fonction de répartition H_k de Z_k en fonction de F et k.

2. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des $(X_n)_{n\geq 1}$. On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = \max(X_i : 1 \leq i \leq N)$

   (a) Justifier l'égalité, pour $x \in \mathbb{R}$,

   $$\{Z \leq x\} = \bigcup_{k\geq 1} \Big(\{Z_k \leq x\} \bigcap \{N = k\}\Big).$$

   (b) En déduire que la fonction de répartition H de Z est donnée par

   $$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \sum_{k\geq 1} (F(x))^k \ \mathbb{P}(N = k).$$

   (c) Déterminer H dans le cas où X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et N suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, *i.e.* $\mathbb{P}(N = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Exercice 7

1. Soient X une variable aléatoire positive et $a > 0$. Démontrer l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}.$$

2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1, et $r > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

(a) Montrer, en utilisant l'inégalité de Markov, que pour tout $0 < \lambda < 1$,

$$\mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{n} \geq 1+r\Big] \leq \mathbb{P}\Big[e^{\lambda S_n} \geq e^{n\lambda(1+r)}\Big] \leq \left(\frac{\mathbb{E}e^{\lambda X_1}}{e^{\lambda(1+r)}}\right)^n.$$

(b) En déduire que $\mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{n} \geq 1+r\Big] \leq (1+r)^n e^{-nr}$.

Exercice 8 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

Exercice 9 Soient U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1]$ et X la variable aléatoire définie par $X = \dfrac{1+U}{1-U}$.

1. Déterminer la densité de la variable aléatoire X.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = [X]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Exercice 10 Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi de densité

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{3}{4}\exp(-|x+2y| - |x-y|).$$

Calculer la densité de la loi de $(X+2Y, X-Y)$ puis les densités des lois de X et Y.

Exercice 11 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi de densité

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Montrer $\frac{1}{X}$ est de même loi que X.

Exercice 12 Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire $Y = \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.
2. Calculer la loi de la variable aléatoire $Z = \min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.

Exercice 13

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_0 = T_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad T_n = n - S_n.$$

(a) Pour $n \geq 1$, préciser la loi des variables aléatoires S_n et T_n.

(b) Pour $n \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(S_n = 0, T_n = 0)$. S_n et T_n sont-elles indépendantes?

3. Soit N une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad U(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega), \quad V(\omega) = T_{N(\omega)}(\omega) = N(\omega) - U(\omega).$$

(a) Justifier l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n\geq k} \mathbb{P}(S_n = k, N = n).$$

(b) En déduire que U suit la loi de Poisson de paramètre λp.

(c) Déterminer la loi de $1 - X_1$ puis, préciser la loi de V .

(d) Montrer que, pour $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(U = k, V = l) = \mathbb{P}(N = k + l)\mathbb{P}(S_{k+l} = k)$.

(e) En déduire que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

Exercice 14 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. On rappelle que, $\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_{X_1} de X_1.
2. En déduire la loi de la somme $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Exercice 15 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$. On note, pour $n \geq 1$,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

1. Calculer, pour tout $n \geq 1$, la fonction caractéristique de Y_n et préciser sa loi.
2. Déterminer la fonction caractéristique de Y ainsi que sa loi.