Exercice 1 : Soient α un réel strictement positif et X la variable aléatoire de densité f_X définie par (loi de Pareto):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X. Calculer : $\mathbb{P}(0 < X \leq 2)$.
3. Pour quelles valeurs de α, X admet une espérance et une variannce. Les calculer quand elles existent.
4. On pose $Y = \ln(X)$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq 0)$.
   (b) Calculer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire la loi de Y.

Exercice 2 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X est une variable discrète telle que

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On considère la variable aléatoire définie par $Z = XY$. On note F_Z la fonction de répartition de Z et F_Y celle de Y.

1. Montrer que, pour tout z réel, $F_Z(z) = \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}(1 - F_Y(-z))$.
2. Déterminer la loi de Z.

Exercice 3 :

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$,
$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \ k > 0.$$
   (a) Calculer $\mathbb{P}(X > n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Calculer pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X > n + k \mid X > k)$.
2. Soit Y une variable aléatoire discrète indépendante de X de loi géométrique de paramètre $q \in]0,1[$. On pose $Z = \min(X,Y)$ et $R = X + Y$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que Z suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
   (c) Donner les valeurs de la variable aléatoire R et déduire sa loi.

Exercice 4. On rappelle que la densité d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x).$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2. Calculer la fonction de répartition F_X de X.
3. Soit maintenant $t > s \geq 0$. Montrer que: $\mathbb{P}(X \geq t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t - s)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.
5. **Application** : on suppose maintenant que X représente la durée de vie en années d'une télévision et $\lambda = \frac{1}{8}$.
   (a) Calculer la probabilité que la télévision que vous venez d'acheter ait une durée de vie supérieure à 8 ans.
   (b) Vous possédez une télévision depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore supérieure 8 ans à partir de maintenant? Conclusion.
6. Soit Z et Y deux variables aléatoires indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(Z + Y)$ et $Var(Z + Y)$. En déduire que la variable aléatoire $Z + Y$ ne suit pas la loi exponentielle.
   (b) On note $H = min(Z, Y)$.
      i. Ecrire l'événement $\{H \geq t\}$ en fonction des événements $\{Z \geq t\}$ et $\{Y \geq t\}$.
      ii. Calculer $\mathbb{P}(H \geq t)$ pour $t \geq 0$ et $t < 0$.
      iii. En déduire la fonction de répartition F_H de H, puis la loi de H.

Exercice 5.

1. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$. On considère la fonction $H : x \longrightarrow \int_0^x f(t)dt$ et on pose $L(x) = H(\sqrt{x})$. Calculer $L'(x)$.
2. Soit X la variable aléatoire définie par sa fonction densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Soit F la fonction de répartition de X, montrer que $F(x) = 1 - F(-x)$.
   (b) On pose $Y = X^2$ et soit G la fonction de répartition de Y. Montrer que

$$G(y) = 2 \int_0^{\sqrt{y}} f(t)dt, \quad \text{si} \quad y > 0.$$

   (c) En déduire la fonction densité g de Y.
   (d) Calculer l'espérance mathématique de Y.

Exercice 6. On considère que la durée de vie d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On appelle loi de survie du composant la fonction D définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par $D(t) = 1 - F(t)$ où F est la fonction de répartition de X.
On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $D(n) \neq 0$.
Un composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle coefficient d'avarie à l'instant n du composant la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité

$$\pi_n = \mathbb{P}(X = n | X > n-1).$$

1. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$ à l'aide de la fonction D. En déduire l'égalité

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}.$$

2. On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que X suit la loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire que X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
   (a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer, pour tout entier naturel n, $D(n)$ en fonction de n et p.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, la valeur de π_n.
3. Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel n non nul, $\pi_n = \alpha$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $D(n) = (1-\alpha)D(n-1)$.
   (b) En déduire l'expression de D_n en fonction de n et α.
   (c) En déduire que X suit une loi géométrique et préciser son paramètre.