Exercice 1 : Soit les fonction g définie par :

$$g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Déterminer le développement de g en série de Laurent en 0 dans les trois cas suivant :

1. $0 < |z| < 1$,
2. $1 < |z| < 2$,
3. $|z| > 2$.

Exercice 2 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

1. Etablir la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

   On Considère la fonction complexe définie par

   $$g(z) = z^{\frac{1}{3}} \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}, \quad \text{avec} \quad z^{\frac{1}{3}} = |z|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\,arg(z)}{3}}.$$

2. En utilisant un développement en série de Taylor, calculer le résidu de g au point $z_0 = i$.

   Soient R et r deux réels tels que $0 < r < 1 < R$. On considère γ^+ le contour formé par le segment $[-R, -r]$, le demi-cercle supérieur C_{r^-} de centre 0 et de rayon r, le segment $[r, R]$ et le demi-cercle supérieur C_{R^+} de centre 0 et de rayon R.

3. Montrer que $\left| \displaystyle\int_{C_{R^+}} g(z)dz \right| \leq \pi R^{\frac{4}{3}} \dfrac{R^2+1}{(R^2-1)^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{C_{R^+}} g(z)dz$.
4. Trouver $\displaystyle\lim_{r \to 0} \int_{C_{r^-}} g(z)dz$.
5. Calculer I.

Exercice 3 : Soit $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} dx$.

1. Montrer que I est une intégrale convergente.

   Soit f la fonction complexe définie par $\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$. On considère γ^+ le contour formé par le segment $[-R, -r]$, le demi-cercle supérieur C_{r^-} de centre 0 et de rayon r, le segment $[r, R]$ et le demi-cercle supérieur C_{R^+} de centre 0 et de rayon $R > 0$.

2. Etudier les singularités de f et donner les résidus correspondants puis calculer $\displaystyle\int_{\gamma^+} f(z)dz$ suivant les valeurs de R.

3. (a) Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad \sin(x) \geq \dfrac{2x}{\pi}$ et que $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\sin(\theta)}d\theta \leq \frac{\pi}{R}$.

   (b) Pour $R > 1$, montrer que $\displaystyle\left|\int_{C_{R+}} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi}{R(R^2-1)}$.

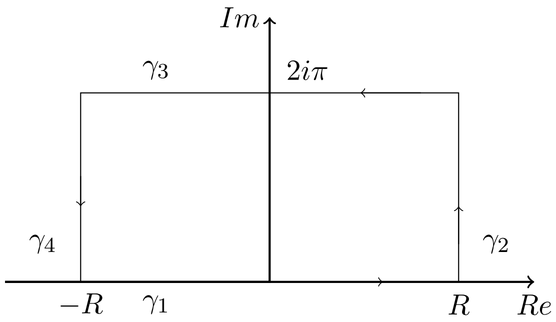
4. Donner $\displaystyle\lim_{r\to 0} \int_{C_{r-}} f(z)dz$.

5. En déduire la valeur de I.

Exercice 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x}}{1+e^x}$, $\quad 0 < \lambda < 1$.

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

   Dans la suite, on Considère la fonction complexe définie par $f(z) = \dfrac{e^{\lambda z}}{1+e^z}$ et $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ le contour fermé suivant :



2. Quels sont les pôles de f. En utilisant un développement de e^z au voisinage de $i\pi$, donner le résidu de f au point $z_0 = i\pi$.

3. Montrer que $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq 2\pi\frac{e^{\lambda R}}{e^R - 1}$. En déduire $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz$.

4. Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_4} f(z)dz = 0$.

5. Déduire que $I = \dfrac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$.

Exercice 5 : Soit la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}$.

1. Etablir la convergence de $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$.

   On Considère la fonction complexe $f(z) = \dfrac{\ln(z)}{\sqrt{z}(1+z^2)^2}$, où

   $$\ln(z) = \ln|z| + i\,\theta \quad \text{et} \quad \sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\,arg(z)}{2}}, \quad \text{avec} \quad 0 \leq arg(z) = \theta < 2\pi.$$

   Soient R et r deux réels tels que $0 < r < 1 < R$. On considère γ^+ le contour formé par le segment $[-R, -r]$, le demi-cercle supérieur C_{r^-} de centre 0 et de rayon r, le segment $[r, R]$ et le demi-cercle supérieur C_{R^+} de centre 0 et de rayon R.

2. En utilisant un développement en série de Taylor, étudier la singularité de f au point $z_0 = i$ et donner le résidu correspondant puis calculer $\int_{\gamma^+} f(z)dz$.

3. Montrer que $\left| \int_{C_{R^+}} f(z)dz \right| \leq \pi\sqrt{R}\dfrac{(\ln(R)+\pi)}{(R^2-1)^2}$. En déduire $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_{R^+}} f(z)dz$.

4. Trouver une majoration de $\int_{C_{r^-}} f(z)dz$. En déduire $\lim_{r\to 0} \int_{C_{r^-}} f(z)dz$.

5. Calculer les valeurs de I et $J = \int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}$.

Exercice 6 : Par la méthode des résidus calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(7\theta)}{2+\sin(\theta)} d\theta.$$