Exercice 1 : Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)dt.$

1. Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F satisfait l'équation différentielle $2F'(x) + xF(x) = 0$ et en déduire la valeur de F.

Exercice 2 : On considère la fonction donnée par : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}\, dt.$

1. Montrer que F est définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \int_0^1 t^x \ln(1 + t)dt.$

1. Montrer que F est définie sur $]-2, +\infty[$.
2. Montrer que F est continue sur $]-2, +\infty[$.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $]-2, +\infty[$.

Exercice 4 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}\, dt.$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
3. En posant le changement de variable $u = \frac{x}{t}$, former une équation différentielle vérifiée par F sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F(0)e^{-2|x|}$.

Exercice 5 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+tx}dt.$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer F.

Exercice 6 : On considère la fonction donnée par:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt)\, dt.$$

1. Donner le domaine de définition D de F.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur D.
3. Calculer F.

Exercice 7 : Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que G est de classe C^1.
3. Justifier et calculer $H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt$
4. En déduire la valeur de G.

Exercice 8 : On considère la fonction réelle de la variable réelle : $x \mapsto F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^{x-1} \ln(t)} dt$.

On pose $f(t,x) = \frac{t-1}{t^{x-1} \ln(t)}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times]1, +\infty[$.

1. Trouver un équivalent de f au voisinage de 1 et au voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que le domaine de définition de F est $D =]3, +\infty[$.
3. Soit $a > 3$. Démontrer que F est continue sur $[a, +\infty[$. En déduire que F est continue sur D.
4. Démontrer que F est de C^1 sur D.
5. Pour $x \in D$, donner l'expression de F'. Déduire que pour tout $x \in D$

$$F(x) = \ln(x-2) - \ln(x-3) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9 : On considère la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout entier n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3. Montrer que pour tout réel t strictement positif fixé, l'application $g_t : x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow t^{x-1}$ est convexe. En déduire que l'application Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

5. Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10 : On considère la fonction F définie par: $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $[0, +\infty[$.

2. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer que F est de calsse C^2 sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer que $F''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt$, pour tout $x > 0$.

5. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt = \frac{x}{x^2+4}$ pour tout $x > 0$.

6. Vérifier que $|F'(x)| \leq \dfrac{1}{x}$, pour tout $x > 0$. En déduire que $F'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4)$, pour tout $x > 0$.

7. A l'aide d'une intégration par parties, déduire que $F(x) = \frac{1}{4}x\ln(\frac{x^2}{x^2+4}) - \arctan(\frac{x}{2}) + \dfrac{\pi}{2}$.

8. En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$.

9. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.