Exercice 1. Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

$\mathbb{P}(X = x_i,\ Y = y_j)$	$y_1 = -1$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$
$x_1 = -2$	0.2	0.2	α
$x_2 = 0$	0.1	0.1	0.05
$x_3 = 1$	0.2	0	0.1

1. Calculer la valeur de α.
2. Calculer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2. Soit X une v.a.r discrète dont la loi est donnée par :

Valeurs de X	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On considère la variable $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y).
2. X et Y sont-elle indépendantes ?
3. Calculer $Cov(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

Exercice 3. Soit (X, Y) un couple de variables alétoires discrètes. La loi conditionnelle $\mathbb{P}(X = x|Y = y)$ de X sachant Y est définie par

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x,\ Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(Y = y) \neq 0.$$

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = x,\ Y = y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x|Y = y)\mathbb{P}(Y = y) & \text{si} \quad \mathbb{P}(Y = y) \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On suppose maintenant que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et pour des entiers n et m, $\mathbb{P}(X = n|Y = m)$ est la loi binomiale de paramètre m et p. Calculer la loi marginale de X, $\mathbb{P}(X = n)$.

Exercice 4. Soient n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p. On note $Y = \sum_{k=1}^{n} X_i$.

1. Montrer que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p.
2. En déduire que si X et Z deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ alors $X + Z$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Exercice 5. Une machine à embouteiller peut tomber en panne. La probabilité d'une panne à chaque emploi est de 0,01. La machine doit être utilisée 100 fois. Soit X le nombre de pannes obtenues après 100 utilisations.

1. Quelle est la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X=1)$ et $\mathbb{P}(X \geq 4)$.
3. On estime le coût d'une réparation à 500 Dhs. Soit Y la variable aléatoire représentant la dépense pour les réparations après 100 utilisations. Exprimer Y en fonction X et calculer $\mathbb{E}Y$ et $Var(Y)$.

Exercice 6. Au sein d'une population de personnes, 4% mesurent moins de 1,60 m et 12% plus de 1,80 m. Soit X la variable aléatoire qui désigne la taille des personnes. On suppose que X suit une loi normale de paramètres m et σ.
Calculer la taille moyenne m de cette population ainsi que son écart type σ.