Exercice 1.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

2. Soit X une v.a. discrète de loi : $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\mathbb{E}(X^\alpha) < +\infty$.

Exercice 2. Soit S une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, a)$.

1. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $U = S(S-1)$ et en déduire celle de la variable aléatoire $V = S^2$. (Considérer la fonction $f(x) = (x + 1 - a)^n$).

2. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $W = S^3$. (Considérer la variable aléatoire $T = S(S - 1)(S - 2)$.)

Exercice 3. On lance deux dés équilibrés à n faces. On note N_i le résultat du lancer pour $i = 1, 2$.

1. Vérifier que
$$\mathbb{P}(N_1 > N_2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_1 > N_2 | N_1 = k)\mathbb{P}(N_1 = k).$$

2. Déduire que $\mathbb{P}(N_1 > N_2) = \dfrac{n-1}{2n}$.

Exercice 4. On rappelle que la densité d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par:
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x).$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

2. Calculer la fonction de répartition F_X de X.

3. Soit maintenant $t > s \geq 0$. Montrer que: $\mathbb{P}(X \geq t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t - s)$.

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

5. **Application** : on suppose maintenant que X représente la durée de vie en années d'une télévision et $\lambda = \dfrac{1}{8}$.

   (a) Calculer la probabilité que la télévision que vous venez d'acheter ait une durée de vie supérieure à 8 ans.

   (b) Vous possédez une télévision depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore supérieure 8 ans à partir de maintenant? Conclusion.

6. Soit Z et Y deux variables aléatoires indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$.

   (a) Calculer $\mathbb{E}(Z + Y)$ et $Var(Z + Y)$. En déduire que la variable aléatoire $Z + Y$ ne suit pas la loi exponentielle.

(b) On note $H = min(Z, Y)$.

i. Ecrire l'événement $\{H \geq t\}$ en fonction des événements $\{Z \geq t\}$ et $\{Y \geq t\}$.

ii. Calculer $\mathbb{P}(H \geq t)$ pour $t \geq 0$ et $t < 0$.

iii. En déduire la fonction de répartition F_H de H, puis la loi de H.

Exercice 5.

1. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$. On considère la fonction $H : x \longrightarrow \int_0^x f(t)dt$ et on pose $L(x) = H(\sqrt{x})$. Calculer $L'(x)$.

2. Soit X la variable aléatoire définie par sa fonction densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Soit F la fonction de répartition de X, montrer que $F(x) = 1 - F(-x)$.

(b) On pose $Y = X^2$ et soit G la fonction de répartition de Y. Montrer que

$$G(y) = 2\int_0^{\sqrt{y}} f(t)dt, \quad \text{si} \quad y > 0.$$

(c) En déduire la fonction densité g de Y.

(d) Calculer l'espérance mathématique de Y.

Exercice 6. On considère que la durée de vie d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On appelle loi de survie du composant la fonction D définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par $D(t) = 1 - F(t)$ où F est la fonction de répartition de X.
On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $D(n) \neq 0$.
Un composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle coefficient d'avarie à l'instant n du composant la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité

$$\pi_n = \mathbb{P}(X = n | X > n - 1).$$

1. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$ à l'aide de la fonction D. En déduire l'égalité

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}.$$

2. On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que X suit la loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire que X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

(a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

(b) Calculer, pour tout entier naturel n, $D(n)$ en fonction de n et p.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, la valeur de π_n.

3. Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel n non nul, $\pi_n = \alpha$.

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $D(n) = (1-\alpha)D(n-1)$.

   (b) En déduire l'expression de D_n en fonction de n et α.

   (c) En déduire que X suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

Exercice 7. Soit F la fonction de répartition définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \leq -2 \\ a(x+b)^2 \quad \text{si} \quad x \in]-2, 0] \\ cx + d \quad \text{si} \quad x \in]0, 1] \\ e \quad \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

1. Donner les conditions que doivent vérifier les nombres réels a, b, c, d et e pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X absolument continue.

2. On suppose que $\mathbb{P}(X \leq -1) = 0$. Déduire les valeurs de a, b, c, d et e.