

Exercice 1 Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, F sa fonction de répartition et U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Si F est continue et strictement croissante, quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
2. Dans le cas général on définit F^{-1} , l'inverse généralisé de F par :

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1.$$

Quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?

Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1.

1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Déterminer la loi de S_n , puis donner la limite presque sûre et en probabilité de la suite $(\frac{S_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. On pose $Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on donnera la loi.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Exercice 3 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que la suite $(\frac{X_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la suite $(\frac{X_n}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans L^1 vers 0.
3. Montrer que la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers une limite que l'on déterminera.
4. Soit l'événement $A_n = \{\omega : X_n(\omega) < 2 \ln(n)\}$.
 - (a) On note par A l'ensemble tel que : $\omega \in A$ équivalent à ω appartient à tous les A_k sauf peut-être un nombre fini". Ecrire A avec des symboles \cap et \cup .
 - (b) Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 4 Soit N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes intégrables de même loi. On suppose que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est indépendante de la variable N . On pose

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0, \\ \sum_{i=1}^N X_i & \text{si } N \geq 1. \end{cases}$$



1. Montrer que Z est une variable aléatoire.
2. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.
3. On suppose que les variables X_i sont de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ ($\mathbb{P}\{X_i = 1\} = p$) et N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la loi de Z .

Exercice 5 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi μ et N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* indépendante de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^N f(X_k)\right) = \mathbb{E}(N) \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x).$$

Exercice 6 : Soient $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Soit $r > 0$.

1. Donner la limite presque sûre, en probabilité et en loi de la suite $(\frac{S_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

3. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2} + r\right] \leq \mathbb{P}\left[e^{\lambda S_n} \geq e^{n\lambda(\frac{1}{2}+r)}\right] \leq \left(ch\left(\frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda r}\right)^n.$$

4. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2} - r\right] \leq \mathbb{P}\left[e^{-\lambda S_n} \geq e^{-n\lambda(\frac{1}{2}-r)}\right] \leq \left(ch\left(\frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda r}\right)^n.$$

5. En déduire, en utilisant l'inégalité $ch(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$, que

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq r\right] \leq 2e^{-2nr^2}.$$

Exercice 7 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la loi de $Y = aX_1$ et calculer sa fonction caractéristique φ_Y .

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.



- Quelle est la loi de S_n .
- Calculer l'espérance de $Y_n = e^{S_n - \frac{n}{2}}$.
- Déterminer la limite presque sûre, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\frac{S_n}{n}$.
- En déduire la limite presque sûre, lorsque n tend vers $+\infty$, de Y_n .

Exercice 8

- Soit $(p_n)_n$ une suite de réels dans $]0, 1[$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. telles que pour tout n , X_n est une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ et X une v.a. de loi de poisson de paramètre λ . Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers X .
- Soit (X_n) une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la limite en loi de la suite $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k$.

Exercice 9 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi telle que $\mathbb{E}(X_1)^2 < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $M_n = \frac{S_n}{n}$ et $q_n = [\sqrt{n}]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x .

- On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \geq 0$.
 - Montrer que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (M_{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.
 - Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{q_n^2}{n} Z_{q_n} \leq M_n \leq \frac{(q_n + 1)^2}{n} Z_{q_n + 1}.$$

- En déduire que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.
- Montrer que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 10 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

- On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Calculer la loi de S_n .
- Montrer que la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers Y dont on donnera la loi.
- Calculer $\mathbb{P}(\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n) \leq 0)$.
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n e^{-n} \frac{n^k}{k!}$.